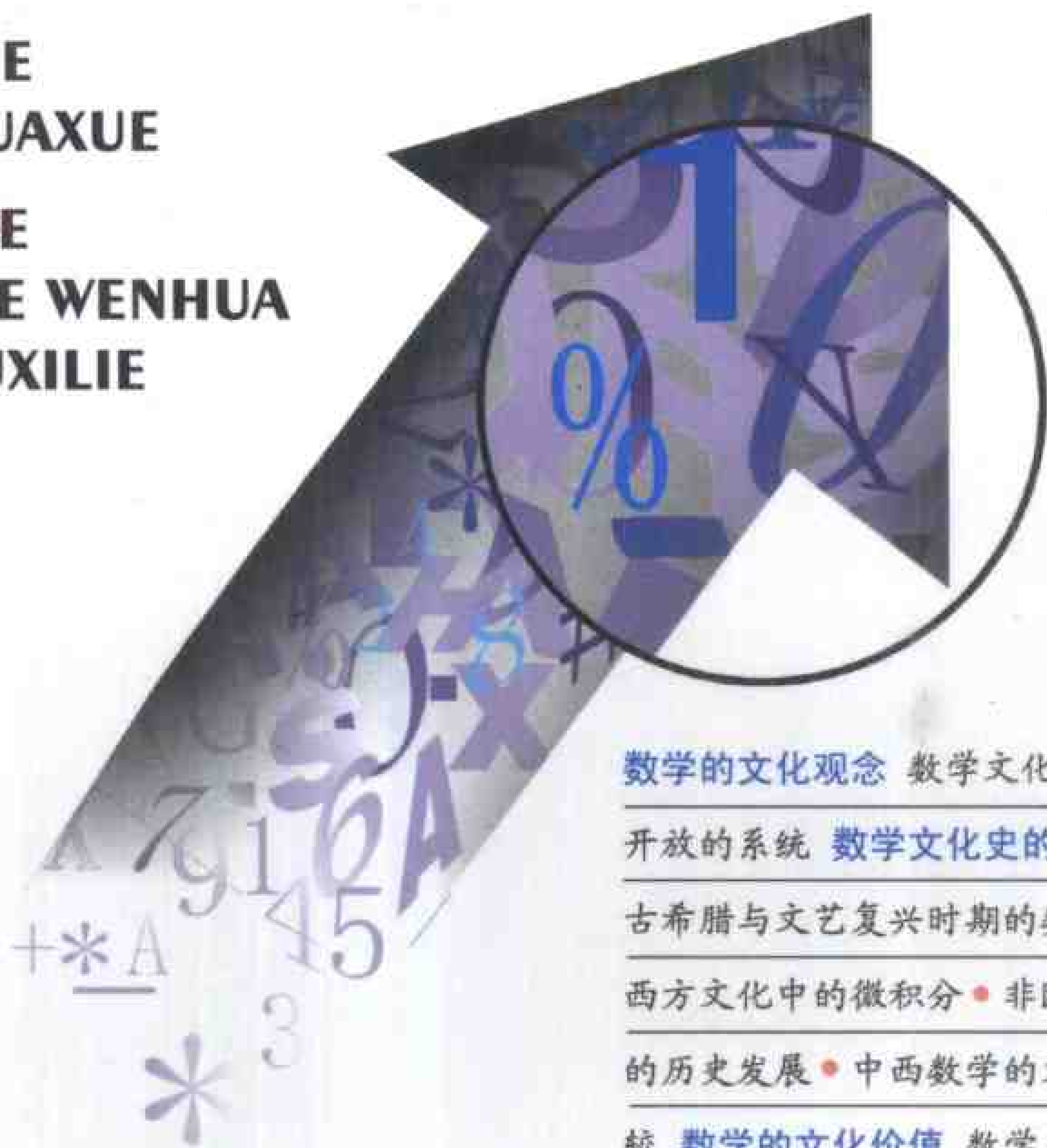
数学·哲学·文化·教育系列

数学文化学

郑毓信 王宪昌 蔡仲 著

SHUXUE
WENHUAXUE

SHUXUE
ZHEXUE WENHUA
JIAOYUXILIE



数学的文化观念 数学文化：一个开放的系统 数学文化史的研究 古希腊与文艺复兴时期的数学 • 西方文化中的微积分 • 非欧几何的历史发展 • 中西数学的文化比较 数学的文化价值 数学与理性 • 数学与思维

四川教育出版社



数学文化学

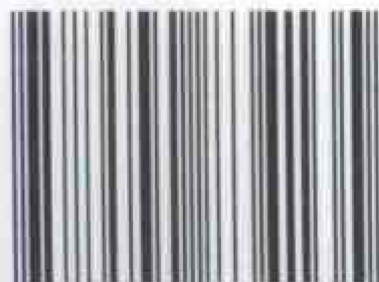
THE CULTURAL STUDIES OF MATHEMATICS

本书是“数学·哲学·文化·教育系列”中的第二部。

本书代表了建立数学文化学系统理论的一个自觉努力，即是从数学的文化观念、数学文化史的研究和数学的文化价值这样三个方面构建起了数学文化学的初步理论框架。

立足于数学哲学、数学史和数学教育学的现代研究是本书的主要特点，而其主要目的则是希望能从各个侧面清楚地揭示数学的社会一文化特性。由于后者正是现代数学观、现代数学史研究和现代数学教育观的一个重要内容或特征，相信广大数学工作者、数学史工作者、特别是数学教育工作者都能从中获得有益的启示。

数学是人类文化的一个重要组成成分，数学是一种理性精神，一个不掌握数学作为一种文化的民族是注定要衰落的，一个与整体性的文化一社会环境相脱离的数学与数学教育系统也肯定是没有前途的。



ISBN7-5408-3413-7/G·3218
定价：19.80元

92

C1-0525

数学·哲学·文化·教育系列

数学文化学

SHUXUE WENHUAXUE

郑毓信　王宪昌　蔡仲著



四川教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学文化学/郑毓信,王宪昌,蔡仲著.—成都:四川教育出版社,1999

(数学·哲学·文化·教育)

ISBN 7-5408-3413-7

Ⅰ.数… Ⅱ.①郑…②王…③蔡… Ⅲ.数学-文化学 Ⅳ.O1-05

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第53215号

责任编辑:刘　玲
封面设计:张　苏
技术编辑:王　凌
责任校对:王立戎
责任印制:姜　卫

数学文化学(数学·哲学·文化·教育系列)

四川教育出版社出版发行　(成都市盐道街3号　邮政编码:610012)
自贡新华印刷厂印刷　(自贡市檀木街95号　邮政编码:643000)
开本880×1230　1/32　印张13.25　插页4　字数300千
2001年1月第1版　2001年9月第2次印刷
ISBN7-5408-3413-7/G·3218　定价:19.80元
印数:2001-5000册

本书若出现印装质量问题,请与工厂调换,电话:(0813)2303642

“数学·哲学·文化·教育系列”总序

——积极开展数学教育的多学科、多方位研究

郑毓信

数学教育的理论研究在近二十年中应当说经历了十分重要的转变。就我国而言，在最初无疑是“教材、教法研究”一统天下；其后，在80年代则逐步形成了以“数学学习论”、“数学教学论”和“数学课程论”为主体的新的理论体系；然而，从90年代以来，数学教育的现代研究又明显表现出了多样化、多方位的新特点，而这不仅是指开拓了更多的研究方向，如数学教育的测量与评估、数学方法论、现代技术在数学教育中的应用、数学思维教育等，而且也是指表现出了多学科的相互渗透与整合这一重要趋势。这一趋势与国际数学教育界的现代发展潮流也是完全一致的。例如，作为数学教育的重要指导性著作，1992年出版的《数学教与学研究手册》(Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning）共列举了29个课题，其中就包括了心理学、社会－文化研究、(数学）哲学等多方面的内容，如“数学的性

质：它的作用和影响”、“数学教室的文化：一个未知量”、“教师的信念与观念：一个综述”、“学会数学地思维：问题解决、元认知与数学中的意义赋予”、“转向高层次数学思维：函数、极限、无限和证明”、“民俗数学与日常认知”等。从而，总的来说，积极开展多学科、多方位的研究就可说是数学教育现代发展的一个重要特点。

就上述方向的研究而言，以下几个课题是十分重要的：

（1）数学教育哲学

数学教育哲学的兴起是数学教育现代发展的必然趋势，因为，在经历了种种的“改革运动”以后，如60年代的“新数学运动”、70年代的“回到基础”、80年代的“问题解决”等，为了更好地解决数学教育何去何从的问题，人们无疑需要从理论的高度对数学教育的一些基本问题作出更为自觉的分析与反思，包括“什么是数学”、“为什么要进行数学教育”、“什么是数学学习活动的本质”等。这样，数学教育哲学的兴起就不可避免了。

从时间上说，英国学者欧内斯特（P. Ernest）于1991年出版的《数学教育哲学》（上海教育出版社于1998年出版了该书的中文版）即是关于这一论题的最早的系统研究。特别是，这一著作明确地提出了这样的思想，即数学教育哲学研究主要应围绕以下四个问题展开：①数学的本质；②数学学习活动的本质；③数学教育的目的；④数学教学活动的本质。然而，由于这是一个全新的研究领域，因此，尽管欧内斯特已经明确地提出了上

述四个论题，但是，他的这一著作却未能对这些问题作出充分的讨论；而且，这一著作事实上主要集中于各种不同数学教育目标的分析，从而就很难说成是成功地建立起了关于“数学教育哲学”的理论体系。

与上述的作法相反，笔者认为，数学教育哲学的最终目标就是要为数学教育奠定必要的理论基础。为了实现这一目标，我们就必须从理论的高度对上述四个问题作出全面和深入的分析。事实上，我们在此可将“什么是数学教学活动的本质”这一问题归属于“什么是数学学习活动的本质”，因为，归根结底地说，学生即应被看成是学习活动的主体，从而，学习活动的本质也就直接决定了教学活动的本质。

就哲学对于数学教育现代发展的重要影响而言，我们在此可特别提及当前在国际数学教育界十分盛行的建构主义（constructivism）。

具体地说，作为学习活动本质的分析，建构主义属于认识论的范畴，其核心观点就在于：学习并非是学生对于教师所授予的知识的被动接受，而是一个以其已有的知识和经验为基础的主动建构过程。

就对学生在学习活动中的主体地位以及学生在认识活动中能动作用的肯定而言，建构主义无疑有其积极的方面，并构成了对于传统教学思想的严重挑战，特别是，按照建构主义的观点，我们就应对教师在教学中的地位以及什么是适当的教学方法等一系列问题作出新的思考和分析。也正是在这样的意义上，有不少学者认为，建构主义事实上可被看成数学教育在90年代的主要口号。

然而，在充分肯定建构主义的积极意义的同时，我们又应看到，建构主义在现代的发展也包含有一些消极的成分，特别是，前些年在西方各国十分流行的“极端建构主义”就可说是由于完全否定认识的社会性而走向了荒谬。

当然，理论上的荒谬是不可能不付出代价的，而新的实践则又必然会促使人们纠正过去的错误并积极地去发展更为科学的理论。这事实上也就是建构主义在90年代的实际发展途径。就我国数学教育的发展而言，我们既应努力地去追随国际上数学教育的最新发展，但同时又应当注意从理论的高度去对此作出独立的分析，以防止成为各种错误的时髦口号的不自觉俘虏。显然，这也就更为清楚地表明了数学教育哲学所具有的重要的现实意义。

（2）数学教育的社会－文化研究

如果说数学教育哲学即是代表了更为深刻的理论思考，那么，关于数学教育的社会－文化研究则就可以说是为我们深入开展数学教育的研究提供了一个新的、更为广阔的视角。这就是指，我们应把数学教育看成人类活动的一个有机组成成分，并从社会和文化这样一种宏观的角度去作出新的分析。

更为一般地说，所说的社会－文化研究事实上也为我们更为深入地去理解数学的本质提供了重要的启示，特别是，数学不应被等同于数学知识（事实性结论）的汇集，而应主要地被看成人类的一种创造性活动，从而，除事实性结论外，我们也就应当把“问题”、“语言”、

“方法”等同样看成是数学（或者说，数学活动）的重要组成成分；另外，更加重要的是，由于在现代社会中每个数学家都必然地是作为相应社会共同体（“数学共同体”）的一员从事自己的研究活动的，从而就自觉地或不自觉地处于一定的数学传统之中，因此，我们也就应当把作为数学传统具体体现的各种观念，即如数学观和应当如何去从事数学研究的共同认识等，看成数学（活动）的又一重要组成成分。

显然，从这样的角度去进行分析，我们也就应深入地去研究社会－文化环境对于数学发展的重要影响，特别是，我们即应清楚地看到人类发展史上存在有多种不同的数学传统，而各种数学传统、尤其是所谓的“东西方数学传统”又各有其一定的优点和局限性。容易看出，上述的研究不仅对于我们正确评价数学的历史发展有着重要的指导意义，而且也对促进数学的现代发展有着重要的启示意义。

特殊地，从教育的角度看，以上的分析显然也就表明了我们应从更为广泛的角度去从事数学教育的研究。例如，80年代以来在国际上所兴起的关于“民俗数学”（ethnomathematics）的研究事实上就可被看成从社会－文化的角度去从事数学教育研究的一个重要内容。

具体地说，所谓“民俗数学”的研究，其基本的出发点就在于，我们应当清楚地认识到学生可以通过自己的日常生活获得一定的数学知识，而后者与他们在学校中所学到的数学知识（可称为“学校数学”或“正规数学”）很可能是不相同的（或者说，是完全不相干的）。

当然，我们在此不应将“民俗数学”与“学校数学”绝对地对立起来，毋宁说，我们既应明确肯定由民俗数学向正规数学转变的必要性，也应当善于以民俗数学作为进一步发展正规数学的适当基础。然而，就当前的研究来说，主要的问题则又在于我们应当充分认识民俗数学的积极意义，而不应对此采取视而不见、甚至是完全排斥的态度。

事实上，在笔者看来，民俗数学的存在即是从又一角度更为明确地向我们提出了这样的问题：我们应当努力使学校的数学教学与学生的日常生活更为紧密地联系起来。例如，正是基于这样的考虑，一些学者提出了应当使“数学课程本土化”的口号，而这显然是一个十分有意义的研究方向。

最后，从社会－文化的角度去进行分析，我们显然也应高度重视关于数学教育的社会－文化功能的分析，特别是，这直接关系到了数学教育的基本目标。例如，只有立足于人类社会由工业社会向信息社会的重要转变，我们才能更好地认识数学教育由“应试教育”向“素质教育”转变的历史必然性，从而也才有可能更为自觉地去参与这一重要的变革运动。就目前的论题而言，这显然就更为清楚地表明了数学教育的社会－文化研究的重要性。

(3) 数学方法论的深入研究

数学方法论现今在我国数学教育界已不再是一个陌生的名词了。自徐利治先生在70年代末首先倡导这方面的研究以来，数学方法论不仅经历了一个自无到有的发

展过程，而且也对实际的数学活动、特别是数学教育产生了十分重要的影响，以致一些学者提出，就我国数学教育的现代发展而言，数学方法论应被看成最为重要的促进因素之一。

然而，如果就近期的情况进行分析，我们在此却又可以看到某种发展的停顿，而其主要表现就是新的创造性工作的缺乏，特别是，数学方法论科学理论体系的建立更可说是一个急待解决的问题。

为了在后一方面取得切实的进展，笔者以为，我们一方面应对已做的工作作出认真的总结和反思，另外又应注意吸取国外积极的研究成果。事实上，就国外的相关研究而言，即如关于“问题解决”和“高层次数学思维”（advanced mathematical thinking）的现代研究等，在很大程度可说是与国内的数学方法论研究构成了平行的发展。特别是，这些研究不仅真正作到了对于波利亚的超越，而且相对于国内的研究而言，它们还有着不同的研究内容和研究特色。从而，从整体上说，这两者就有着明显的互补性和相互促进的作用。

例如，所谓的“高层次数学思维”即是相对于“初等数学思维”（elemently mathematical thinking）而言的，而两者的区别则在于，高层次数学思维已经包括了由“描述”向“定义”、由“确信”向“证明”的重要转变。也正因为此，以“高层次数学思维”作为主要的研究对象事实上就标志着相应的研究已开始深入到了真正的数学活动之中。显然，也只有这样，我们才可能真正揭示出数学思维的特殊性。事实上，国外关于高层次数学思

维的现代研究已经超出一般学习心理学的范围而形成了一些数学学习所独有的概念，如“概念定义”和“概念意象”，“过程”和“对象”，“形象化”，“概念域”等。从而，这也就为我们深入地开展数学方法论的研究指明了努力的方向。

特殊地，笔者以为我们即就可以通过对于国内外研究成果的科学整合建构起数学方法论的科学理论体系。

具体地说，由于“问题解决”和“概念的生成和应用”可以被看成实际数学活动、特别是数学教学活动的主要形式，因此，这就应当被看成数学方法论的两个主要内容；另外，从更高的层次去进行分析，数学创造的问题（包括所谓的“数学的研究精神”）显然也应被看成数学方法论的又一重要内容。

另外，作为新体系的一个重要特征，我们则又应当十分注意将数学方法论的研究与相应的心理学研究有机地结合起来。事实上，这正是国外相关研究的一个重要特色，即是直接立足于实际数学思维过程（包括数学学习过程）的深入研究。显然，这也应被看成数学方法论研究的一个重要原则。

最后，就数学方法论的深入研究而言，我们又应突出地强调这样一点，即数学方法论不仅有助于数学教学的改善，更直接关系到了数学教育的各个方面，包括教育目标、教学内容的选择和组织等。显然，这也就更为清楚地表明了我们确应把数学方法论的深入发展看成是数学教育多学科、多方位研究的一个重要方面。

综上可见，积极开展多学科、多方位的研究即可被

看成数学教育现代发展的一个重要特点。正是基于以上的认识，我们特设计了“数学·哲学·文化·教育”这样一个系列，以期能从一个侧面更好地反映数学教育的现代发展，并能积极地促进我国的数学教育事业的深入发展。

这一系列共包括以下三部著作：

①数学教育哲学（作者：郑毓信）；

②数学文化学（作者：郑毓信、王宪昌、蔡仲）；

③数学思维与数学方法论（作者：郑毓信、肖柏荣、熊萍）。

应当说明的是，关于数学教育的多学科、多方位研究当然并不局限于以上三个论题，而我们之所以作出这样的选择主要是由于以下的原因：

第一，由以上的论述我们已经知道，这三个论题对于数学教育的深入发展都有着特别的重要性。

为了更加清楚地说明问题，我们在此还可特别提及台湾数学教育界关于数学教育发展的指导性文件《数学教育》，其中，作为“数学教育研究的关键性议题与发展趋势”，曾列举了以下十个论题：①国际化之趋势；②数学教育的全民化；③建构主义与数学教育哲学；④认知科学与数学教育；⑤计算机与数学教育；⑥问题解决；⑦民俗数学；⑧数学教育评价；⑨数学师资培养；⑩大学数学教育。另外，在具体地指明上述十个论题的内容之前，文件又强调指出，我们除了基于境内数学教育现代化的需要，“特意强调国际化的重要性外，更觉得有必要在全方位改革的诉求之邻，明显地标志出数学教育全民化的意义。因为数学虽有科学之母的美称，数学教育在

本质上所肩负的是人文陶冶的使命，数学理解力的传播与数学精英的培育，同是提升数学文化的工作，内容虽有差异，追求高层次思考的精神却是一致的。……由于教育的目标、内容与方法，皆受意识形态所左右，对当今显学‘建构主义’有关的议题，作一简述，乃有必要。由于，以深人细察人们的学习机制与过程为宗旨的跨科性研究：认知科学，及其与数学教育的关联，至今尚未受到国内学者的赏识，故系为一节，以示其要。……”（第2页）显然，这也就清楚地表明了上述三个选题对于数学教育深人发展的重要性。

在上述的十个论题中，论题1、论题2和论题5在很大程度上即可说是集中地表明了现代数学教育特定的社会背景，包括由于社会的进步对于数学教育所提出的新的更高的要求，以及计算机这一新的物质技术条件为数学教育的深人发展所提供的新的挑战和机遇；另外，论题8、论题9和论题10则直接反映了数学教育现代发展中一些薄弱环节；除此以外，其余的各个论题则都可以说是体现了一种多学科、多方位的研究方向，并都是与上述的三个选题直接相关的。当然，这方面的已有工作也就为上述三部著作的撰写提供了重要的基础。

然而，应当强调的是，这三部著作又并非是已有工作的简单组合，恰恰相反，它们主要反映了作者的独立思想和探索性研究；另外，还应强调的是，这又不是一种纯理论的研究，勿宁说，我们更希望相应的理论研究能对促进实际的数学教育活动发挥积极的作用，特别是，这些著作即能为数学教师的培养、包括在职教师的进修

提供切实的帮助。笔者以为，数学教育的现代发展已经清楚地表明了这样一点：除去数学知识的更新和深化以外，在数学教师的培养和训练中我们应十分重视知识面的拓宽，更应注意观念（包括数学观和数学教育观等）的更新。例如，正是从这样的角度去分析，笔者以为，香港大学教育学院为数学教育硕士班开设以下的六门"专业课程"就为我们提供了重要的启示：①数学教育哲学；②数学课程研究及其发展；③数学学习和教学的研究；④评估和课程；⑤数学教育的社会文化研究；⑥数学教育的现代研究。（当然，上述的课程内容事实上也就从又一侧面表明了"数学·哲学·文化·教育"这一系列的前沿性。）

第二，这三个论题比较适合作者的知识背景和研究经历，从而也有可能较好地发挥作者的研究特色，以期达到较高的写作水准。

具体地说，作为本系列的设计者和主要作者，笔者1965年从江苏师范学院数学系毕业以后曾长期在中学任数学教师，从而就对中学数学教育的实际情况有着较深的了解；其后，1978年笔者作为硕士研究生进入了南京大学哲学系，这不仅使我又一次获得了系统学习的机会，而哲学素养的提高更为我深入地去从事关于数学和数学教育的理论分析打下了必要的基础。从1981年起，笔者主要从事数学哲学的专门研究，同时，作为徐利治教授的学生和学术助手，自己也在数学方法论的研究上投入了较大的精力。1989年以后，怀着从担任中学教师起就已逐渐养成的深厚情感，自己又重新转向了数学教育，

特别是，由于特殊的研究背景，自己先后从事了“数学的文化观念”、“数学教育哲学”、“认知科学、建构主义与数学教育”等具有较强理论性和交叉性的课题的研究，从而也就为本系列的写作提供了直接的基础。还应提及的是，由于在这些年中笔者曾有机会多次赴英美等国从事学术访问和合作研究，从而就对国际上的学术动态及其最新研究成果有着较好的了解，而这不仅切实保证了相关研究的先进性，而且也为充分吸收国外积极的研究成果并通过对国内外相关研究的比较和整合作出新的创造性工作提供了良好的基础。

从整体上说，这事实上就可被看成这一系列的主要特点（或者说，笔者即是希望能在以下一些方面取得切实的进步）：①交叉性：数学、哲学、文化学、认知科学、方法论和教育学等多学科的相互交叉与渗透；②前沿性：系列中所论及的都是国际数学教育界最为关注的一些热点问题；③创新性：这并非对国外工作的简单介绍，作者不仅就各个主要问题提出了独到见解，并从整体上给出了新的概念体系；④理论性：扎实的理论根底，独到的哲学见解。

当然，由于论题涉及面广，在构思与写作的过程中笔者也深切地感受到了自身的不足和局限性。十分幸运的是，这些不足之处和局限性由于王宪昌、蔡仲、肖伯荣、熊萍等先生的加盟得到了必要的补救。如果没有这几位朋友的大力合作，这一系列就不可能顺利地问世并达到现有的水准。

第三，还应提及的是，作为这一系列的第一部著作

——《数学教育哲学》在1995年已先期得到了出版。这一著作不仅获得了全国优秀教育类图书评选（第四届）一等奖，也受到了广大数学教育工作者的普遍欢迎，从而，也就极大地增强了笔者在数学教育的多学科、多方位研究这一方向上作出进一步努力的决心，这一系列的后两部著作就是这一努力的直接结果。

由于论题的前沿性，更由于作者所希望的是一种创造性的工作，因此，笔者就并不期望这些工作已经达到了完全成熟的程度；恰恰相反，我们十分希望这些探索性工作能引起更多数学教育工作者的兴趣，从而就能通过共同的努力进一步促进我国的数学教育理论研究。也正是出于这样的考虑，我们十分欢迎来自各个方面的批评和意见。

最后，笔者愿借此机会表示对于四川教育出版社的领导和有关编辑的深切谢意：这不仅是因为他们对本系列的出版提供了极大的支持，更是因为这一工作最为清楚地表明了他们对于我国数学教育事业的深切关注，对于广大的数学教育工作者来说这无疑也是一个极大的支持。

目　　录

序言：数学文化学的内容、性质和意义

一　数学哲学、数学史和数学教育现代研究的共同热点

数学文化学，笼统地说，即是指从文化这样一个特殊的视角对数学所作的分析。由于这不仅从一个更为广泛的角度指明了影响数学历史发展的各个因素，而且也直接涉及到了对于数学本质及其价值更为深入的认识，因此，从整体上说，数学文化学就构成了数学哲学、数学史和数学教育现代研究的一个共同热点。

(1) 数学文化史研究的兴起

如众所知，数学史的研究近年来经历了一个十分重要的转折，即是由惟一注重于所谓的“内史”转移到了对于“内史”和“外史”的共同研究，并力图对这两个方面的工作作出合理的综合。

具体地说，所谓“内史”的研究，其基本立场即是认为数学的历史发展主要取决于内在的因素，而且，这在很大程度上又可被归结为一种逻辑的必然性，并主要地体现于某些大数学家的某些伟大思想。也正因为此，传统的数学史研究就明显地表现出了以下的倾向：

第一，数学史家们往往是以当代的数学观去对过去的数学工作作出评价，从而就普遍地缺乏历史的观点；

第二，数学史的研究往往集中于少数著名数学家的

某些伟大思想。例如，正是从这样的立场出发，所谓的“领先权”问题（如微积分究竟是由牛顿、还是由莱布尼兹所首先创立的）就引起了人们的普遍重视。

应当指出，上述这种惟一注重“内史”的作法并非数学史研究所特有，而是科学史研究中的一个普遍现象；然而，由于数学与其他自然科学相比常常被认为具有更大的（相对）独立性，或者说，即是认为数学的发展在很大程度上是由其内在因素所惟一决定的，因此，所说的倾向在数学史的研究中就有着更为突出的表现。而这也许就是导致以下现象的一个重要原因，即上述的惟一注重于“内史”的作法首先是在科学史、而并非是在数学史的研究中得到了突破。

从历史的角度看，所说的“突破”与科学史成为一门独立的学科专业有着直接的联系，特别是，我们在此还应提及这样的现象，即在西方各国，科学史常常被看成历史学研究的一个组成部分，从而，科学史家通常就被归属于历史学系（所）、而并非是自然科学的各个系（所），这样，作为一个必然的结果，以下的事实就得到了突出的强调，即科学应被看成整个人类文化的一个有机组成成分，也即是一种特殊的社会现象。例如，从后一立场去进行研究，我们显然就不仅应当注意少数大科学家的贡献，而且也应注意整个科学共同体的工作，包括各个学派和机构对于科学发展的影响等。

由于后者是一个不可否认的历史事实，因此，相应的研究在数学史中也就逐步得到了开展。诸如关于各个数学学派的研究等。

显然，上述的研究即已包含了由“内史”向“外史”的转移。更为一般地说，现代的研究与传统的数学史研究相比表现出了如下的不同特点：

第一，与先前惟一注重少数著名数学家的某些伟大思想的作法相比，人们现在对个别数学家与相应数学共同体的关系也给予了高度重视，特别是，人们力图揭示在个别数学家的思想发展与数学家相互影响之间所存在的重要联系。例如，正是基于这样的认识，人们对以下各种材料现也给予了普遍的重视，即如一些不很著名的数学家的论著、数学家之间的通信、各种学术会议的记录等。

第二，与先前只是按照当代的数学观去对过去的数学工作作出评价的作法不同，人们现在普遍地认识到了应当采取历史的观点，也即应当从历史的角度去理解先人的工作，而不只是按照现代的观点去对此作出简单的“对”与“错”的裁决。

特殊地，作为内外史研究的一种结合，人们已不再满足于指明重要数学思想发展过程的内在线索，而且也力图揭示这种发展的社会－文化渊源。这样，“数学文化史”的概念的提出也就十分自然了。

具体地说，数学文化史的研究就是要深入地去揭示数学发展的文化渊源，而这又不仅是指个别案例的具体研究，也包括关于数学发展的整体性分析。例如，就西方数学的历史发展而言，我们就应具体地去指明在这种发展与整体性的文化环境之间存在有怎样的联系。另外，从更大的范围去考察，这又正是数学文化史的研究所必

须特别重视的一个事实，即西方数学并不是人类历史上惟一可能的数学形式，恰恰相反，即如中国古代的数学传统就是与古希腊的数学传统很不相同的，在人类的历史上存在有多种不同的数学传统。从而，作为数学文化史的研究，我们就必须从文化的角度对这种种不同的数学传统何以存在的原因作出具体的分析。事实是，如果在相互隔离的情况下，完全不同的文化环境居然发展出了相同的数学传统，那么，这无疑就从反面证明了整体性的文化环境对于数学的发展并不具有任何真正的重要性，从而就从根本上取消了数学文化史研究的意义。当然，这并非历史的真实面貌。最后，同样重要的是，从文化的角度看，就如整个人类文化是由多种不同的民族文化所构成的，我们在此也应明确承认多种不同的数学传统在人类数学史上的存在和贡献，从而，这也就清楚地表明了这样一点：我们不应用某种单一的标准去对不同传统下的数学工作作出评价，尤其是，我们不应以西方的标准去对其他的数学传统（包括中国古代的数学传统）作出简单化的评价。事实上，由深人的思考即可看出，后一种作法与前述的“按照当代的数学观去对过去的数学工作作出评价”是同一性质的错误，两者的差别只是在于前者是用空间上的绝对的同一性去取代了时间上的绝对的同一性。

显然，以上的论述已经清楚地表明了数学文化史研究的意义，即这不仅为数学史的研究提供了新的视角和新的研究领域，而且也促使数学史学者们对自己的工作作出必要的反思，特别是，这将促使人们更为公正、更

为客观地去从事不同数学传统的比较和评价。

(2) **数学的文化观念**

容易看出，上述关于数学与整体性文化环境之间关系的分析已经包括了关于数学本质的一种新观点，即数学不应被等同于知识的简单汇集，而应主要地被看成人类的一种活动，一种以“数学共同体”为主体、并在一定文化环境中所从事的创造性活动。

更为一般地说，我们在此并可提及科学观的重要转变，而这同样是由于科学史研究的深入所直接导致的，并就可以被看成科学哲学现代发展的一个重要特征，也即是由惟一注重于科学知识的逻辑分析转而更加重视对于科学历史发展过程的具体考察，而且，在这种研究中，我们又应把“科学共同体”看成科学认识活动的主体，并应努力从社会－文化的角度去揭示科学历史发展的基本规律或基本模式。例如，上述的立场在库恩（T. Kuhn）的科学哲学研究中就有着最为典型的表现。

尽管所说的观念转变最初也是在科学哲学的领域中实现的，但是，由于这一转变极大地深化了人们的认识，并导致了“科学哲学的革命”，因此，这就不可避免地对数学哲学的现代研究产生了十分重要的影响。例如，正是通过把库恩的基本思想推广应用到数学的领域，基切尔（P. Kitcher）发展起了自己的“数学活动论”，也即认为应当把数学看成由“问题”、“论证”、“命题”、“语言”和“元数学观念”等多种成分所组成的一个复合体；另外，以下的观念则更可以被看成“数学活动论”的核心所在，即数学主要应被看成人类的一种创造性活动，一

种在一定传统指导下进行的创造性活动。从而，总的来说，这事实上就从一个侧面更为清楚地表明了数学观的重要变化，即是由静态的、绝对主义的数学观转向了动态的、经验和拟经验的数学观。

应当指出，从文化的角度去分析，上述工作并就清楚地表明了数学的文化性质：正如“民族文化”、“地域文化”等，由于数学家在现代社会中构成了一个特殊的群体（数学共同体），并具有相对稳定的数学传统，因此，我们也就可以在同样的意义上去谈及“数学文化”，即是一种由职业因素（在更为深入的意义上，也可关系到居住地域、民族等因素）联系起来的特殊群体（数学共同体）所特有的行为、观念和态度等。

显然，上述的文化观念也就为我们更为深入地去认识数学的本质提供了一个新的视角，特别是，它清楚地表明了在数学哲学与数学史之间所存在的重要联系：如果说正是数学史的研究直接促进了数学观的上述转变，那么，相应的数学哲学研究反过来则又为我们更为深入地去从事数学史的研究提供了必要的理论框架。例如，上面所已提及的“数学活动论”就为我们具体地去研究数学传统的历史演变提供了一个重要的理论框架。从而，这也就如拉卡托斯（I. Lakatos）所指出的：“没有数学史的数学哲学是空洞的，没有数学哲学的数学史则是盲目的。”

特殊地，我们在此还应特别提及美国学者怀尔德（L. Wilder）关于数学发展的动力和规律的研究。具体地说，将着眼点由各个个别的数学家转移到了数学家的群

体，并将数学放在整个文化环境之中去加以考察，这就是怀尔德上述研究的一个基本出发点；另外，由于清楚地揭示了数学不仅具有自己特殊的价值标准，更有着自己特殊的发展规律，因此，在怀尔德看来，这也就表明数学应当被看成是整个人类文化的一个相对独立的子系统，当然，这又并非是一个完全封闭的系统，恰恰相反，由于正是其内在力量和外部力量的共同作用直接决定了数学的发展和进化，因此，我们就应明确肯定数学系统的开放性。

总的来说，为了清楚地揭示“数学文化”的特殊性质，我们就不仅应当从静态的角度去指明“数学文化”的主要成分及其内在结构，而且也应从动态的角度去揭示“数学文化”的发展动力和特殊规律。这就是所谓的“数学的文化观念”。

（3）充分发挥数学的文化价值

就数学作为整个文化的一个有机组成成分而言，我们当然不仅应当看到整体性的文化环境对于数学发展的重要影响，而且也应看到数学对于整个文化、特别是人类文明进步的重要作用。

具体地说，后者就是所谓的“数学的文化价值”。尽管后一方向上的研究同样依赖于历史的考察，但是，相对于一般的数学史研究而言，关于数学文化价值的分析应当说更加着眼于未来的发展，也即是希望能以历史为鉴而使我们的工作具有更大的自觉性，从而也就能够更为有效地去促进我们的工作。特别地，我们在此即应清楚地看到关于数学文化价值的分析对于数学教育的特殊

重要性。

如众所知，我国的教育正经历着由“应试教育”向“素质教育”的重要转变，而这也正是世界范围内教育事业发展的一个总的趋势，因为由工业时代向信息时代的转变已对教育提出了新的不同要求，即是要求未来的劳动者普遍地具有较高的素质。但是，“素质教育”下的数学教育应是什么样的呢？或者说，数学教育应如何去贯彻、落实“素质教育”这一总的教育方针呢？对于后一问题我们在此当然不能作出全面的分析；但是，这无疑应当被看成“数学素质教育”的一个重要内涵，即我们应当充分发挥数学的文化价值。

具体地说，我们在此所说的“数学的文化价值”主要是指数学对于人们观念、精神以及思维方式的养成所起的十分重要的影响，尽管后者主要是一种潜移默化的作用，但这种影响又确实是存在的，特别是，如果我们不是就各个个人，而是就整个民族、国家乃至整个人类文明的进步去进行考察的话，则就可以更为清楚地看出数学作为一种“看不见的文化”对于人类的特殊重要性。

首先，数学对于人类理性精神的养成与发展有着特别重要的意义，而后者则就可以被看成人类文明、特别是西方文明的核心所在。例如，这事实上就是著名数学史学家克莱因（M. Kline）的名著《西方文化中的数学》的一个主要结论。克莱因这样写道：“数学是一种精神，一种理性的精神。正是这种精神，激发、促进、鼓舞并驱使人类的思维得以运用到最完善的程度，亦正是这种精神，试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活；

试图回答有关人类自身存在提出的问题；努力去理解和控制自然；尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻的和最完美的内涵。"（第8～9页）

当然，对于所说的“理性精神”我们并不能理解成某种绝对的、僵化的东西；恰恰相反，随着人类文明的发展，“理性”本身也必然有一个发展和演变的过程。从而，如何通过人类文明发展过程的深入考察更为具体地去揭示数学在西方理性精神形成和发展过程中的重要作用，也就应当被看成数学文化学研究的一个重要内容。另外，同样重要的是，作为人类文明的一种特殊形式，西方文明无疑也有其一定的局限性，从而，我们对此就不应采取一种绝对肯定的态度，而应通过各种不同文化、特别是东西方文化的比较研究对此作出更为恰当的评价。显然，从这样的角度去进行分析，我们就不仅可以谈到数学的“善”，而且也应谈到数学的“恶”。

其次，数学有着重要的思维训练功能，而这又不仅是指逻辑思维的训练，而是有着更为广泛的涵义。

例如，由于数学并非对于客观事物或现象量性特性的直接研究，而是通过相对独立的“模式”的建构、并以此为直接对象来从事研究的，因此，作为“模式的科学”，数学对于人们抽象思维能力的培养就有着特别的重要性。事实上，即使在古希腊人们就已对数学的这种认识论意义有了较为清楚的认识。这就正如柏拉图所指出的，“哲学家也要学（数学），因为他必须跳出浩如烟海的万变现象而抓住真正的实质。……又因为这是使灵魂过渡到真理和永存的捷径。”

另外，我们在此还应突出地强调数学对于人们创造性思维发展的重要作用：由于数学的研究对象并不一定具有明显的直观背景，而是各种可能的量化模式，因此，这也就为人们创造性才能的充分发挥提供了最为理想的场所。特殊地，这显然也就是美学的因素何以在数学研究中占有特别重要位置的一个直接原因。而后一事实则就更为清楚地表明了数学不仅有利于人们逻辑思维的发展，而且有利于人们创造性才能、包括审美直觉的发展，或者说数学即能促进人们右半脑与左半脑的均衡发展。

总的来说，我们应充分认识和发挥数学的文化价值。由于后者构成了连接数学教育与数学文化学研究的一个重要桥梁，从而也就从又一角度清楚地表明了数学文化学的意义。

综上可见，作为数学史、数学哲学与数学教育现代发展的共同热点，数学文化学的研究近年来得到了迅速的发展，并已赢得了人们的普遍重视；进而，这种研究也从各个不同的角度指明了数学文化学的丰富内涵，从而就为建立数学文化学的系统理论奠定了良好的基础。

二　本书的主要内容和特点

(1) 数学文化学的性质

以上我们主要是从数学史、数学哲学与数学教育的现代研究这样几个角度指明了数学文化学研究的内容及其意义。应当说明的是，就数学与人类文化的关系而言，除去上述的几个方面外，我们还可采取另一不同的研究角度，也即主要着眼于人类文化的各个方面，而并非与

数学相关的各个侧面。例如，就历史的研究而言，如果我们采取后一种研究立场，则就应当把研究的重点放在如何从数学的影响这样一个特殊的角度去解释文化发展史上的种种现象，即如神话和宗教的形成与演变等；另外，与关于数学文化价值的分析相比，在后一种研究中，我们则又应当更为具体地去考察数学对于各种具体的文化形式，包括哲学、艺术、文学等的重要影响。

后一方向上的研究无疑也是十分重要的，并已取得了一些重要的研究成果。例如，数学与原始思维的关系、特别是所谓的"数学神秘主义"，就引起了不少学者的很大兴趣。对此例如可参见法国著名人类学家列维－布留尔的名著《原始思维》。另外，克莱因在其名著《西方文化中的数学》中也曾十分具体地考察了数学（主要是牛顿的工作）对于当时的科学哲学、宗教、文学、美学等方面的重要影响。

在笔者看来，我们还可从这样的角度对哲学的历史发展作一更为系统的研究，而这不仅有助于我们更好地去理解数学何以在一些著名哲人的研究工作中占有特别重要的位置，而且也将从一个特殊的角度具体地指明这些学者哲学思想的实际发展途径。即如柏拉图的理念论，笛卡尔的理性主义认识论，康德关于先天综合判断的论述等。

显然，从总体上说，上述各个方面的研究就更为清楚地表明了这样一点：数学应当被看成整个人类文化的一个有机组成成分，从而就是与其他各种成分密切相关、并就是在这种相互影响之中共同发展起来的；但是，与

前述的三个方向上的研究相比，这又毕竟代表了一种不同的研究倾向，或者说，即是有着不同的侧重点和研究目标。

鉴于笔者对“数学文化学”的理解，也即是指从文化这样一个特殊的视角对数学所作的分析，在这一著作中，我们就将主要集中于数学文化学与数学史、数学哲学和数学教育的联系，也即主要是从与数学直接相关的各个方面、而并非是从与一般人类文化学研究的联系这样一个角度去展开论述。应当强调的是，这一立场在很大程度上即是由我们的写作目的所决定的。这就是指，本书主要是写给从事实际数学活动，包括数学哲学、数学史研究的工作者与广大的数学教育工作者看的。当然，这一立场并不排斥一般人类文化学的研究者也能由这一著作得到一定的启示或教益。事实上，从辩证的角度看，任何绝对的分割都是不可能的；勿宁说，我们更应强调各个对立面的相互影响和彼此渗透。从根本上说，这种交叉性也就是“数学文化学”的一个最为重要的特征。

（2）建立数学文化学系统理论的初步努力

以上的讨论已经表明，作为数学文化学的系统研究，本书主要包括以下内容：

第一，数学的文化观念；

第二，数学文化史的研究；

第三，关于数学文化价值的分析。

就现实情况面言，在上述三个方面应当说都已有了一定的工作；但是，已有的工作又都具有一定的局限性，

特别是它们通常只是涉及到了上述的某一方面，而未能从整体上给出关于数学文化学的一个较为完整的理论框架。也正是出于这样的考虑，本书就以初步建立数学文化学的系统理论作为主要的目标。

当然，已有的工作仍可说是为本书的写作提供了一个良好的基础，我们并力图在有关的论述中较好地去反映各个相关研究中所取得的一些最新研究成果。但是，应当明确的是，本书并不是已有工作的简单复述或组合，而主要反映了作者的独立思考和探索性研究，特别是如何着眼于与数学史、数学哲学和数学教育这三者的联系而发展起数学文化学的系统理论更可说是一个创造性的工作。另外，就以上三个部分的具体论述而言，也包括了不少独立的研究成果。例如，在数学文化史的研究中，我们的主要目标并不在于提供若干具体的案例，而是希望能通过对数学历史发展中最为重要的一些环节的相继考察，从整体上指明在整体性的文化环境与数学之间所存在的重要联系，而这事实上就包括了由局部向整体的重要转变；再者，与主要偏重于西方数学传统与西方文明的常见作法相对照，本书突出了东西方的比较研究，而这不仅反映了作者的基本立场，也为本书的分析能够达到一个新的更大高度提供了必要的基础，这就是指，本书包括了对于中西古代数学的比较与评价问题在更高层次上的思考与分析；最后，就数学的文化观念而言，笔者也以已有的工作为基础积极开展了新的思考和更为深入的分析，即如关于数学传统的“观念成分”、与数学发展内在机制及其辩证性质的具体分析等，在笔者看来，

这也就更为深刻地揭示了“数学文化”的内涵。

尽管本书的三个部分分别集中于数学的文化观念、数学文化史和数学的文化价值，但是，应当强调的是，这三者又不应被看成相互独立、互不相干的，恰恰相反，在它们之间存在有十分重要的联系。具体地说，历史的研究可以说构成了本书全部论述的最终基础，这就是说，除去数学文化史的研究以外，关于数学的文化价值与数学发展动力和规律等方面的研究也都直接建立在历史的考察之上；其次，哲学的思考则是为本书的写作提供了必要的理论指导，特别是，这也就清楚地表明了本书并非一本数学史的专著，与此相反，作者所希望的正是我们的工作能对数学史的研究起到一定的启发、指导作用；最后，与数学教育的联系则可说是集中地表明了本书的一个写作意图，即是希望能对实际的数学活动发挥一定的促进作用。

最后，应当指出的是，数学文化学与数学哲学、数学史、数学教育三者的密切联系也就表明了作者的一个基本思想，即是希望本书的写作能体现较强的时代精神，也即能够较为清楚地反映出现代的数学观、数学史观和数学教育观。更为一般地说，这就可以看成本书的精髓所在。

第一篇 数学的文化观念

相对于“数学是构成整个人类文化的一个有机组成成分”这一笼统的提法，本篇的主要目标是具体地指明“数学文化”这一概念的内涵，也即对“数学在什么意义上可以说是一种文化”这一问题作出清楚的解答。事实上，对于上述问题可以从各种不同的角度（或者说，各种不同的层次）去进行分析，而这即就提供了关于数学本质的一种更为深入的认识，这也就是所谓的“数学的文化观念”。

第一章　数学对象的形式建构和文化性质

在这一章我们将首先从对象这一角度指明数学文化的第一种涵义：数学对象并非物质世界中的真实存在，而是抽象思维的产物；另外，我们也将通过与一般文化物的比较集中地指明数学在这一方面的特殊性，这就是数学对象的形式建构性与数学世界的无限丰富性和秩序性。

1.1　作为文化之数学实在

文化，广义地说，是指人类在社会历史实践过程中所创造的物质财富与精神财富的总和。按照这样的理解，我们就应把一切非自然的、也即由人类所创造的事物或对象都看成文化物，而这里所说的“文化性”即是明确肯定了相应事物或对象对于人类创造活动的直接依赖性。

由于数学对象并非物质世界中的真实存在，而是人类抽象思维的产物，因此，在所说的意义上，数学就是一种文化。

例如，谁曾见到过“一”，我们只能见到某一个人、某一棵树、某一间房，而决不会见到作为数学研究对象的真正的“一”（注意，在此不应把“一”的概念与其符号相混淆）；类似地，我们也只能见到圆形的太阳、圆形的车轮、圆形的场地，而决不会见到作为几何研究对象的真正的“圆”（在此我们也必须对“圆”的概念与相应的图形，即如纸上所画的圆明确地加以区分）。从而，即使就最简单的数学对象而言，它们也都是抽象思维的产物。

对于数学对象的上述特性，古希腊的亚里士多德已作了十分明确的论述。亚里士多德指出，数学是研究大小的量和数的，但是，它们所研究的量和数，并不是那些我们可以感觉到的、占有空间的广延性的、可分的量和数，而是作为某种特殊性质的（抽象的）量和数，是我们在思想中将它们分离开来进行研究的。[①] 从而，在亚里士多德看来，数学对象就只是一种抽象的存在，也即是人类抽象思维的产物。

如果说亚里士多德的上述论述主要地只是一种哲学的分析，那么，从历史的角度看，这却是数学发展史上的一个重要转折：正是古希腊人在数学史上首次引进了相对独立的数学对象，并以此作为数学研究的直接对象，从而与数学在古埃及、古巴比伦等地的早期发展相比，这就代表了一次革命性的变化——数学已不再是先前那种建立在直接观察与实验之上的归纳性知识，而是向着

---

① 亚里士多德：《形而上学》，第十三卷，第三章，北京，商务印书馆，1983。

理论科学的方向迈出了关键性的一步。

就数学文化史的研究而言，上述的事实显然为我们提出了一个十分重要的问题：是什么促使古希腊人迈出了上述的关键性一步？对此我们将在第二篇中作出较为具体的分析。在此则首先指明这样一点：尽管在人类历史上曾经存在多种不同的数学传统，但是，由古希腊所开创的上述传统现已为人们所普遍接受。例如，“我们运用抽象的数字，却并不打算每次都把它们同具体的对象联系起来。我们在学校中学的是抽象的乘法表，而不是男孩的数目乘上苹果的数目，或者苹果的数目乘上苹果的价钱。”“同样地，在几何中研究的，例如，是直线，而不是拉紧了的绳子。”（亚历山大洛夫语）显然，就我们现在的论题而言，数学对象的这种抽象性即就清楚地表明了数学对象的文化属性。

容易看出，以上所说的数学对象的抽象性与文学作品中各种人物的虚构性是十分相似的。例如，尽管其可能具有明显的现实原型，但谁也不会把鲁迅笔下的阿Q或巴尔扎克笔下的高老头看成人世间的真实存在，毋宁说，它们都只是一种文学虚构，也即是由人类所创造的抽象对象。

事实上，除上述的基本点外，我们还可从另一角度进一步指明在数学抽象与文学创作之间所存在的共同点。这就是指，两者都在一定程度上依赖于思维的自由想象。具体地说，尽管一些基本的数学概念具有较为明显的直观意义，但数学中又有许多概念并非建立在对于真实事物或现象的直接抽象之上，而是较为间接的抽象的结果，

即是在抽象之上进行抽象，由概念去引出概念；另外，更为重要的是，数学中还有一些概念与真实世界的距离是如此之遥远，以致常常被说成"思维的自由创造"。

例如，我们即可以射影几何为例来具体地体会一下数学中的自由想象。

如众所知，在欧氏平面几何中，点和直线的位置并不是完全"对称"的，因为，过任意两点总可以引一条直线，从而，平面上的任意两点就惟一地确定了一条直线；然而，尽管在一般情况下，平面上任意两条直线也惟一地确定了一个点（它们的交点），但是，如果这两条直线相互平行的话，它们就没有交点了。

正是为了解决这种不对称性，德国数学家德沙格（G. Desargues）首先在直线上引入了一个"无穷远点"，并把它看成与此相平行的各条直线的交点；另外，所有这些"无穷远点"则又构成了所谓的"无穷远直线"。

"无穷远点"和"无穷远直线"的引进在数学上有着很重要的意义，它事实上标志着射影几何的诞生。但是，射影几何中各条直线究竟是怎样的呢？我们不妨具体地来设想一下。

对此匈牙利著名数学家罗莎·彼得（R. Peter）曾十分形象地描述道："如所知，一条直线的两端都是无限延伸的，但我们只给它附加了一个无穷远点（只有这样才能保证对偶原则）[①] 的成立，而如果附以两个无穷远点的话，对偶原理就将遭到破坏，因而直线的两端就好像相

① 即平面上点和直线的对称性。

逢于无穷远处一样，于是直线也就变成某种类型的圆了。虽然我们的直线是向着两个相反的方向无限地延伸的，此处却在一种魔法下变成了圆形，而且它们就像是长在苹果树上的苹果一样，全都悬挂在无穷远直线的各个点上，彼此平行的直线悬挂在同一点上。”（图 1）

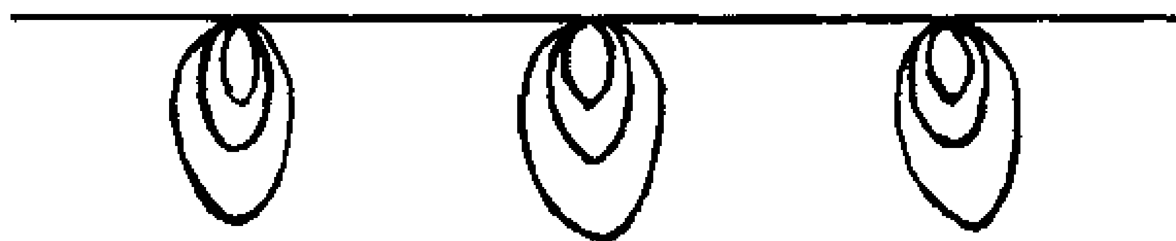


图 1

然而，我们事实上“不应当把这条直线画得如此笔直，但谁也不知道我们究竟应当如何去画，因为无穷远处的一个点是同时位于正东和正西的，而正南与正北却又在另一点处相遇，对于其他方向来说也是同样的情况。我们还是彻底忘记这件事好，因为这并不属于可想象事物的世界。”①

显然，所说的“不可想象性”事实上就最为清楚地表明了自由想象在数学中得到了充分的运用。

正因为自由想象在数学中占有如此重要的地位，数学常常就被称为“创造性的艺术”。显然，这也就更为清楚地表明了数学的文化性质。[值得提及的是，有些数学家本身也是著名的作家。例如，著名的童话《爱丽丝漫游仙境》就出自英国牛津大学的一位数学家之手，并因此而导致了这样的笑话：当时的英国女皇是如此地喜爱

① 罗莎·彼得：《无穷的玩艺》，第 187 页．南京，南京大学出版社，1985。

这一著作以致命令把同一作者以后的各部新著都送给她阅读，然而，后来出现在女皇案头的新著却是一部纯数学的著作。类似地，俄国著名女数学家柯瓦列夫斯卡娅(S. Kowalewsky)不仅在数学上有很大贡献，而且写出了一部被俄国文艺批评家认为“无论在形式上还是在思想内容上都可以与俄国文坛上最佳的作品相媲美”的小说《拉也夫斯卡娅姐妹》。当被问及她为什么能一面忙文学一面搞数学时，柯瓦列夫斯卡娅回答说：“很多人认为数学是一门枯燥乏味的科学，其实，它倒是一门需要大量想象力的科学呢！”]

但是，数学抽象与文学创作相比又有什么不同之处呢？或者说，数学抽象的特殊性究竟是什么呢？

就上述问题而言，一个容易想到的解答显然在于：数学属于科学的范畴，而文学则不然；进而，所说的“科学性”的一个主要涵义则就是指，数学是一种客观的研究。

的确，任何稍有数学知识的人都有这样的体会，即我们在数学中所从事的是一种客观的研究。这就是说，我们不能随心所欲地去创造某个数学规律，而只能按照数学对象的“本来面貌”去对此进行研究。例如，我们既不能随意地把7说成是4和5的和，也不能毫无根据地去断言哥德巴赫猜想的真假，等等。

从而，在很多人看来，数学对象事实上就是一种独立的存在，这也就是所谓的“数学世界”。

与前面关于数学对象依赖于抽象思维的分析一样，这种关于数学对象事实上是一种独立存在的思想也可追

溯到古希腊。具体地说，古希腊的柏拉图曾明确地提出了关于"理念世界"与"现实世界"的区分：前者是真实的、完美的、永恒的、不变的；后者则是不真实的、有缺陷的、暂时的、变动的。柏拉图并曾具体地指明，数学对象就是理念世界中的存在，从而也就是一种不依赖于人类思维的独立存在。

由此可见，亚里士多德和柏拉图在数学对象实在性问题上的基本观念是直接相对立的。事实上，即使我们在此完全不去顾及这种争论的哲学意义，以上所引出的一些基本结论也已包含了一定的矛盾，因为，我们在此先是指明了数学对象并非物质世界中的真实存在，而只是人类抽象思维的一种产物，由此，作为"思维的自由创造"，数学中所反映的就只可能是"纯主观的经验"，那么，这种纯主观的思维创造又怎么可能具有作为一门科学所必须具备的"客观性"呢？

一般地说，上述的矛盾事实上就集中地表明了数学哲学研究中的一个基本问题（可称为"数学的本体论问题"，或"数学对象的实在性问题"），即我们究竟应当把数学对象看成一种不依赖于人类思维的独立存在（从而，在数学中我们所从事的主要地就是一种发现的活动），还是人类抽象思维的产物（从而，我们就可理直气壮地去谈及数学的发明或创造）？例如，由以下的一些论述我们就可清楚地看出在这一问题上所存在的尖锐的观念对立。

数学家埃弗雷特（E. Everett）写道："我们凝神沉思纯数学内的绝对真理，这些绝对真理在晨星们齐声欢唱之前已存在于神的头脑之中，当最后一颗晨星的耀眼

光辉从天幕中消失的时候，它们将继续存在于神的头脑之中。”

与埃弗雷特的华丽词藻不同，著名数学家哈代（G. Hardy）所使用的是较为素朴的语言，但他同样明确肯定了数学对象的客观实在性以及数学认识活动的发现性质。在他的名著《一个数学家的自白》中哈代这样写道：“我认为，数学的实在存在于我们之外，我们的职责是发现它或遵循它，那些被我们所证明并被我们夸大为是我们‘发明’的定理，其实仅仅是我们观察的记录而已。”

与上述的观念相对立，诺贝尔奖获得者、物理学家布里奇曼（P. Bridgman）认为：“只要稍微观察一下就能明白，数学是人类的创造物这一最纯粹的自明之理。”

另外，卡斯纳（E. Kasner）和纽曼（J. Newman）则更为具体地指明：“非欧几何证明数学……是人亲手创造的，它仅仅服从思想法则所设定的限制。”又“我们已经克服了那种认为数学真理是独立于我们自己的头脑而存在的见解，这样的见解竟然能够存在，对我们来说殊感奇怪。”

尽管上述的观念对立在数学哲学领域内可以说根深蒂固，但是，对一般的文化物来说，却似乎并不存在类似的难题，尽管这同样构成了人类文化的一个基本特征，即任何一种文化成分都是人类思维的产物，而其相对于各个个体来说却又具有相当大的独立性，以致对各个个体来说，文化就像自然界一样构成了一种生存环境，而且，各种文化成分并可超越各个具体个人而得到一定的繁衍。

那么，文化学者们是如何对所说的一般文化物的“二重性”作出解释的呢？一个常见的作法即是突出地强调文化的“群体性”，即是认为文化是一种超越个体的群体性的东西。这就是说，尽管某些文化物在最初很可能只是少数人的发明创造，但是，只有当它们为相应的群体所普遍接受时，才能真正成为人类文化的组成成分。显然，按照这样的理解，所谓文化的“思维创造性”，主要地就并非是指文化对象的创造依赖于某个特定个人的思维活动，而是指这些对象不能离开相应的群体而存在；另外，也正由于文化存在于群体之中，因此，相对于各个特殊的个人来说，文化就具有一定的独立性，例如，每个个体都必须通过后天的学习才能获得已有的文化成果，从而，文化就是从外部进入个人大脑的，另外，各个个体必定要走向死亡，而文化作为群体中的存在则可能得到繁衍。

概括地说，按照上述的观念，一般文化物就是通过由个体向群体的转移实现了由主观创造向客观实在的转移。

显然，基于以上所说的数学抽象与文学创作的共同性（后者当然属于所说的一般文化物），我们似乎也可按照同样的思路去解决上述的“数学本体论问题”。其实，这事实上就是美国著名文化学者怀特（L. White）所采取的一个基本立场。具体地说，怀特明确地提出，数学对象应当被看成一种文化，他并就从这样的角度对数学的本体论问题进行了分析。

怀特写道：“下面两个命题虽然表面上互相对立，但

都同样有效，一个命题与另一命题同样真实：①‘数学真理存在于人脑之外，且具准效性’；②‘数学真理脱离人脑就不存在或丧失准效性’。其实，这两个命题的表述方式给人以错误的印象，因为‘人脑’一词是在两种不同的意义上被使用的。在第一个陈述中，‘人脑’指的是单个人的机体；而在第二个陈述中，指的是整个人类。这样，这两个命题都可以是，并实际上确实是真的。数学真理存在于个人降生于其内的文化传统之中，这样，文化传统便从外部进入他的大脑。但是，离开了文化传统，数学概念既不能存在也没有意义，当然，离开了人类，文化传统也不复存在。因此，数学实在独立于个体意识而存在，却完全依赖于人类意识。”

一般地说，怀特认为：“文化的特性是存在于个人意识之外并不依赖于个人意识。个人通过学习他那个群体的习俗、信仰和技术来获得文化。但是，离开了人类文化自身就不存在也不能存在。”在怀特看来，只需坚持这样的立场，在数学对象实在性问题上的观念对立也就立即可以得到消解：“数学真理既是人所发现的，又是人所创造的，它们是人类头脑的产物。但它们是被每个在数学文化内成长起来的个人所遇到或发现的。”

最后，怀特认为，由以上的分析我们也就立即可以引出“数学实在即文化”的结论。怀特写道：“那么，数学实在的本质是什么呢？……我们的解释提供了答案。数学确实具有客观实在性。这种实在，……不是物理世界的实在，但它一点儿也不神秘，数学实在即文化。”“数学概念……存在于文化之中，即存在于人类的行为和

传统思想的主体之中。"[1]

1.2　数学对象的形式建构

怀特的上述分析是有一定道理的，但是，笔者以为，数学的客观性又不能惟一地借助于由个体向群体的转移得到解释。这也就是说，在从事数学本体论问题的分析时，除去数学与一般文化的共同性以外，我们还应清楚地看到数学的特殊性。

具体地说，正如上面所已提及的，通常所谓的"数学的客观性"其主要内涵并不仅仅是指"数学真理存在于个人降生于其内的文化传统之中，从而就是从外部进入他的大脑的"，而主要是指在数学中我们所从事的是一种客观的研究，特别是，即使就某些数学概念的创造者来说，常常就已包括了由"主观的思维创造"向"客观的独立存在"的转化，从而，这种客观实在性就不能仅仅依靠由个体向群体的转移获得合理的解释。

例如，数学的发展史告诉我们，超穷数理论在很大程度上是由德国数学家康托（G. Cantor）独立地发展起来的。具体地说，康托在数学史上第一次引进了超穷基数和超穷序数的概念。由于康托在此所采取的是一种实无限论者的立场，也即是把无限看成一种实在的、完成了的对象，而这是与当时占主导地位的数学思想、特别是所谓的潜无限观念直接相对立的（例如，著名数学家高斯就曾明确地声称："我反对把无穷当作一种完成的实

---

[1] L. White: "The Locus of Mathematical Reality"，《The Science of Culture》，Farrar，Straus，1949.

体来使用，这在数学中是绝对不允许的，无穷不过是谈及极限时的一种说话方式而已。"）因此，康托的超穷数理论在当时就完全是一种"思维的自由创造"，或如与康托同时代的另一著名数学家克朗尼克（L. Kronecker）所形容的那样，是"精心编造的神话"。

但是，尽管超穷数在最初只是康托的"个人创造"，一旦其获得了明确的定义，就立即获得了相对的独立性，即使康托本人也只能客观地去对此进行研究，而不能随意地作出改变。例如，康托证明了如下的定理："有理数集与自然数集具有相同的基数"，"直线上的点集与空间中的点集具有相同的基数"，等等。由于这些结论与直觉如此地不符，以致康托本人也不由惊呼道："我看到了，但我简直不能相信它！"另外，为了解决所谓的连续统问题，即准确地确定直线上点集的"大小"，康托更可谓绞尽了脑汁；但是，不管康托怎样努力，却始终未能解决这一问题，以致为此而"抱恨终身"。显然，这些事例即已清楚地表明康托在此所从事的确实是一种客观的研究。这也就如康托本人所指出的："就新数的引进而言，数学中所必需的仅是给出它们的定义，借助于这些定义，赋予新数以这样的确定性，以及在情况允许时，赋予它们以与旧数这样一种关系，使得在给定的情况下，它们可以明确地加以区分，一旦满足了所有这些条件，一种数在数学中就可以、而且必须被认为是存在的和真实的。"①

尽管康托关于超穷数理论的创造只是数学发展史中

① 道本：《康托的无穷的数学和哲学》，第 60 页，南京，江苏教育出版社，1989。

的一个实例，但由于数学史学家已对此作了较为彻底的研究，因此，我们就可“以康托集合论的发展作为缩影来研究对科学具有重要意义的新思想的产生和发展的问题。”（道本语）特殊地，就我们现在的论题而言，这就是指，对任何一种数学概念或理论来说，尽管它们在最初很可能只是某些个人的“自由创造”，但是，一旦这些概念或理论获得了明确的意义，就立即获得了独立的存在性，对它们的性质我们只能客观地加以研究，而不能再任意地加以改变。从而，就像罗莎·彼得所生动地描绘的那样，数学家在此就像是神话中那个巫师的徒弟：他面对着自己所创造的神灵显得瞠目结舌，数学家们同样从虚无中创造了一个新的世界，但这个新世界却以它那种种神奇和出乎预料的规律控制了数学家，从此，数学家就不再是一个创造者，而仅仅是一个探索者了，他探索着他自身所创造的那个世界的秘密和关系。[①]

那么，作为主观思维创造的数学对象究竟是如何获得客观独立性的呢？笔者以为，正确的解答只能来自对于数学抽象、特别是数学抽象方法的深入分析。

具体地说，抽象性常常被认为是数学的基本特性。然而，由于任何理论科学都依赖于一定的抽象思维，特别是，任何科学概念都是抽象思维的产物，因此，为了清楚地说明数学抽象的特殊性，我们就必须从数学抽象的内容、量度和方法这样几个方面作出进一步的分析。

第一，数学是从量的方面反映客观实在的。这就是

---

① 罗莎·彼得：《无穷的玩艺》，第25页，南京，南京大学出版社，1985。

说，在数学的抽象中我们仅仅保留了事物或现象的量的特性，而完全舍弃了它们的质的内容。显然，这种特殊的抽象内容即就清楚地表明了在数学抽象与一般自然科学抽象之间所存在的一个重要区别。

应当强调的是，以上的分析事实上只具有相对的意义，因为，为了避免所谓的"循环定义"，我们在此显然必须首先对"量"的概念作出明确的说明；然而，后者却并非一个静止的、僵化的概念，勿宁说，量的概念正是由于数学的发展而不断获得了新的意义，或者说，这一概念随着数学的不同发展而处于不断的历史演变之中。特殊地，从历史的角度看，"数量关系"和"空间形式"曾一度构成了"量"这一概念的两个基本意义，但是，由于数学的发展早已突破了这一历史的局限性，因此，在今天我们就不应机械地去坚持"数学是数量关系和空间形式的研究"这一传统的观点。

第二，数学抽象的特殊性也表现在它的量度上。这就是说，数学的抽象程度远远超出了一般的自然科学而达到了特殊的高度。

例如，上一节中所提及的自由想象在数学创造中的重要作用显然就已清楚地表明了数学的高度抽象性。

从量度的角度去指明数学抽象的特殊性当然也有一定的道理，但是，笔者以为，从理论的角度去分析，我们在此又可提出这样的问题：数学何以可能具有如此之高的抽象程度？而这事实上又涉及到了数学抽象的特殊方法。

第三，数学抽象的形式建构性质。

数学抽象是一种"建构"的活动：数学的研究对象正是通过这样的活动得到构造的。

这也就是指，数学并非对于客观世界量性规律性的直接研究，而是以抽象思维的产物——数学对象，作为直接的研究对象。

为了清楚地说明问题，在此我们仍可将数学抽象与一般自然科学中的抽象作一对照：

容易看出，无论就数学抽象或是一般自然科学中的抽象而言，概念的产生相对于（可能的）现实原型而言往往都包含有一个"理想化"、"简单化"和"精确化"的过程。例如，任何真实事物的形状都很难说是严格的圆（球）形，在现实世界中也不可能找到没有大小的点、没有宽度的线等，从而，相应的几何概念就都是理想化的产物；同样地，力学研究中所涉及的也都是"理想的对象"，即如没有摩擦力的斜面、绝对的真空等。

然而，数学抽象的特殊性则在于：数学对象是借助于明确的定义得到建构的［具体地说，所谓的"派生概念"是借助已有的概念明显地得到定义的，更为基本的"原始概念"则是借助相应的公理（组）"隐蔽地"得到定义的］；而且，在严格的数学研究中，无论所涉及的对象是否具有明显的直观意义，我们都只能依据相应的定义和推理规则去进行推理，而不能求助于直观。从而，在严格的数学研究中我们就是以抽象思维的产物作为直接的研究对象。

由于在通常的情况下我们总是按照逻辑法则去进行推理的，因此，在这样的意义上，就可把数学对象的建

构说成是一种“逻辑建构”。但是，应当强调的是，我们不应把所说的“逻辑法则”看成是某种先验的、绝对的东西。事实上，这正是数学基础研究所给予我们的一个重要启示（可参见2．2节）。例如，直觉主义对传统逻辑的批判及其所创立的直觉主义逻辑就已清楚地表明了逻辑的相对性。这就是说，传统逻辑事实上只适用于非构造性数学，在构造性数学的范围内则必须用直觉主义逻辑去取代传统逻辑。另外，又如希尔伯特（D. Hilbert）的形式主义研究所已表明的，在纯形式的研究中我们应当同时去从事数学和逻辑的建构活动，也即应当把推理规则作为一个部分同时包括在数学的建构活动之中。由此可见，与“逻辑建构”相比，“形式建构”就是一个更为合适的名称。

总的来说，数学抽象在方法上的特殊性就在于这种建构活动的形式特性。这就是说，数学并非对于客观事物或现象量性特性的直接研究，恰恰相反，与可能的现实原型相对照，数学抽象是一种“重新建构”的活动，在数学中我们并就以这种建构活动的产物作为直接的研究对象。

容易看出，以上关于数学对象形式建构性质的分析即就为前述关于数学对象何以可能由“主观的思维创造”转化为“相对独立的客观存在”的问题提供了具体的解答：由于数学抽象是一种形式建构，也即相应数学对象的性质完全取决于相应的定义（和推理规则），因此，即使一些数学概念在最初只是某些个人的“自由创造”，但是，一旦它们获得了明确的定义，就立即获得了相对的

独立性，即使其创造者也只能客观地去对此进行研究，而不能再任意地加以改变。

为了清楚地说明问题，在此还可对数学抽象与文学创作作一简单的比较。如众所知，文学作品中的主人公都是虚构的人物，但是，一些伟大的文学作品又都具有这样的特点：随着故事情节的开展，作品中的主人公形象逐步得到了确立，这时，他们似乎也获得了一定的独立性：即使是作者本人也不能随意地去改变他们的“命运”，而只能客观地去进行“观察”、“描述”……然而，与文学作品的这种“客观性”相比，数学的研究显然有着更大的确定性和一义性，特别是，尽管同一数学对象在不同的主体那里可能有着不同的“心理图像”（例如，第一节中所提及的“无穷远点”和“无穷远直线”显然就可看成这方面的一个典型例子），但是，相应的数学结论却具有超越个体的普遍性和一义性，而这事实上也就是数学能够成为一门科学的一个必要条件。

另外，文学创作中还经常用到“以虚代实”的手法：除去某些对象“只能意会，不可言传”这一因素外，创作者之所以采取这种手法的一个主要目的就是希望通过在作品中留下一些“空白”可以更好地发挥读者的想象力，从而达到更大的艺术效果。但是，这种“以虚代实”手法的一个直接结果显然就是对象的不确定性以及不同主体在理解上的不一致性，从而也就与数学的确定性和超越个体的一致性构成了鲜明的对照。

最后，应当指出，也正由于数学对象的形式建构特性，因此，相对于可能的现实原型而言，通过数学抽象

所形成的数学概念（和理论）就具有更为普遍的意义：它们所反映的已不是某一特定事物或现象的量性特征，而是一类事物在量的方面的共同特性。例如，从历史的角度看，计算运动物体的瞬时速度是导致导数概念的一个重要来源；但是，导数的概念及相关的微积分理论却并不局限于速度问题的研究，而是有着更为普遍的意义，即可被用于具有相同量性特征的一类问题。例如，电流强度就是电量对于时间的导数，曲线在某点处切线的斜率是纵坐标对于横坐标的导数，等等。

正因为数学的研究对象、即概念和命题具有超越特殊对象的普遍意义，它们就都是一种模式［对所说的“模式”（pattern）应与通常所说的“模型”（model）明确地加以区分：按照我们的用法，模型从属于特定的事物或现象，从而就不具有模式那样的相对独立性和普遍意义］，进而，数学则就可以被说成“模式的科学”，或者更为恰当地说，“数学即是（量化）模式的建构与研究”。

1.3　无限丰富的数学世界

1. 综合以上两节的分析，我们就可对数学对象的实在性问题作出如下的具体解答：

第一，由于数学对象是借助于明确的定义得到建构的，而且，在严格的数学研究中，我们又只能依靠所说的定义和相应的规则去进行推理，而不能求助于直观，因此，尽管某些数学概念在最初很可能只是少数人的“发明创造”，但是，一旦这些对象得到了建构，它们就立即获得了确定的“客观内容”，对此人们只能客观地加

以研究，而不能再任意地加以改变。

这也就是说，正是数学建构的形式特性保证了数学研究的“客观性”，也即直接促成了数学对象由“纯主观的思维创造”（mental construction）向相对独立的“思维对象”（mental entity）的转化。

第二，又如怀特等人所已指出的，除上述的意义外，我们并应从一个不同的角度（或者说，从更高的层面上）去论及数学研究的客观性。这就是指，数学对象有可能超越个体而获得更为普遍的意义，也即成为一种“文化实在”。这也就如著名数学家波莱尔（A. Borel）所指出的：“凡属文明或文化上的所有事物，我们往往假定了它们的存在，因为它们是我们和别人共有的东西，我们可以就它们互相交流思想。有些东西，只要我们相信在别人的头脑里和在我们的头脑里都是以同样的形式存在的，我们可以一起来考虑和讨论，那么它就成为客观事物（而不是‘主观’事物）了。”[1]

显然，与上述数学建构活动的形式特性不同，我们在此所强调的即是这种活动的社会性质。这就是指，在现代社会中，个人的数学创造最终必须接受社会的“裁决”：只有为相应的社会共同体（即数学共同体）一致接受的数学概念才能真正成为数学的成分；反之，如果一个数学家的“发明创造”由于某种原因（即如严重背离当时的研究主流）始终未能得到普遍的接受，那么，即使这种建构从形式上看是完全没有问题的，最终仍将很

[1] 波莱尔：“数学——艺术与科学”，载邓东皋等编，《数学与文化》，第149页，北京，北京大学出版社，1990。

快为人们所遗忘，也即不可能真正成为数学的研究对象。

从而，在上述的意义上，我们也就可以作出关于"思维对象"与"客观对象"（objective entity）的进一步区分，并在后一意义上去肯定数学对象的客观性。这就是说，数学对象最终应被看成一种"社会的建构"。这也就如同波莱尔所指出的："数学家们共同享有一个精神的实体：大量的数学思想，他们用心灵的工具研究的对象，其性质有的已知有的未知，还有理论、定理、已经解决和尚未解决的问题。"①

综上可见，数学对象由"主观的思维创造"向相对独立的"客观对象"的转化就是经由对象的形式建构和由个体向群体的转移这样两个环节得以实现的，即包括了"纯主观的思维创造"、"思维对象"和"客观对象"这样三个不同的阶段。

最后，应当指出，就数学研究的客观性问题而言，我们当然还应涉及数学与客观世界的关系。在此首先指明这样一点：尽管数学并非对于客观世界量性规律性的直接研究，但是，就整体、过程、总和、趋势、源泉而言，数学规律又正是思维对于客观世界量性规律性的正确反映（从而，所谓的"经验的标准"就应被看成决定数学创造"可接受性"的首要因素，对此可参见第二章）。当然，这又并非一种简单的、被动的反映，恰恰相反，数学抽象的建构性质即就清楚地表明了这种认识活动的能动性质，特别是，所说的建构在一定意义上就意

① 波莱尔："数学——艺术与科学"，载邓东皋等编，《数学与文化》，第150页，北京，北京大学出版社，1990。

味着与真实的分离，从而也就为思维的自由创造提供了极大的可能性。（这也就是说，正是数学抽象的形式建构性质、也即数学抽象在方法上的特殊性为数学的高度抽象提供了现实的可能性。）

2. 依据上面的论述，我们也就可以对数学抽象与文学创作的不同之处作出进一步的分析：尽管两者都在一定程度上依赖于思维的自由想象，但是，即使我们不去断言数学抽象比文学创作达到了更高的抽象程度，前者显然也具有如下的不同特点，即在总体上表现出了明显的层次性和秩序性，而这是文学创作所完全不具有的。

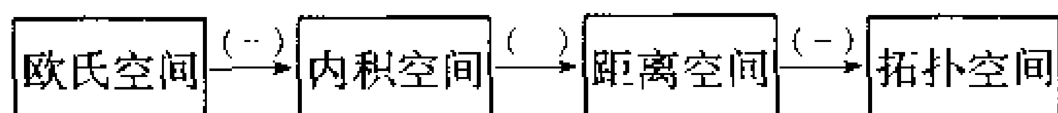
具体地说，由于数学对象的建构相对于可能的现实原型而言是一个“重新建构”的过程，而且，严格的数学研究就以此作为直接的对象，因此，数学对象的形式建构就在很大程度上为数学想象的自由翱翔提供了现实的可能性。

例如，正如前面所提及的，数学抽象未必是从真实事物或现象直接去进行抽象，也可以以业已得到建构的数学模式作为“原型”，再间接地加以抽象。这就正如美国当代著名数学家斯蒂恩（L. Steen）所指出的：“数学是模式的科学。数学家们寻求存在于数量、空间、科学、计算机乃至想象之中的模式。……模式提示了别的模式，并常常导致了模式的模式。正是以这种方式数学遵循着自身的逻辑：以源于科学的模式为出发点，并通过补充所有的由先前的模式导出的模式使这种图像更加完备。”[1]

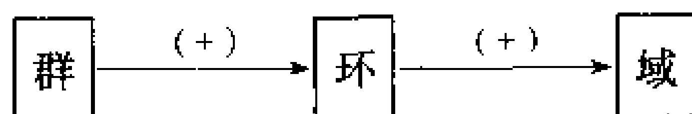
---

[1] L. Steen: "The Science of Patterns", 《Science》, 240 [1988, April].

特殊地，我们在此并可着重提及一般化（弱抽象）与特殊化（强抽象）在数学中的广泛应用。前者即是指由原型中选取某一特征或侧面加以抽象，从而形成比原型更为普遍、更为一般的概念或理论。例如，由欧氏空间的概念出发，通过一系列的弱抽象，我们就可依次建立以下的概念（其中，以符号“$\xrightarrow{(-)}$”表示弱抽象的关系）：



另外，所谓的“强抽象”，则是指通过引入新特征强化原型去完成抽象，从而所获得的新概念就是原型的特例。例如，如果以符号“$\xrightarrow{(+)}$”表示强抽象的关系，“群”、“环”、“域”等概念就组成了如下的“强抽象链”：



容易看出，如果就思维方向进行分析，弱抽象和强抽象可说是直接相对立的。但是，应当强调的是，如果把弱抽象看成概念的分解，那么，强抽象就不只是简单的复归（组合），即如将分解所得出的概念再依反方向重新组合起来（或者说，即是由“抽象的规定”重新回到“思维中的具体”），恰恰相反，由于在此可以尝试对分解所得出的概念进行各种可能的组合（和新的分解），因

此，通过弱抽象和强抽象的综合运用（也即概念的分解和适当组合）我们就可获得各种可能的新的模式，从而构造出一个无限丰富、而又井然有序的“数学世界”。

例如，我们在此应当特别提及法国布尔巴基学派的工作，因为这一学派关于数学结构的分析，即就最为清楚地表明了数学的高度创造性及其在整体上所具有的明显的层次性和秩序性。

具体地说，正是通过对若干基本的数学理论（如自然数理论、实数理论等）的具体分析，布尔巴基学派指出，大部分数学理论都可被归结成三种基本的数学结构（他们称之为“母结构”），即代数结构、序结构和拓扑结构。显然，这事实上也就是一个弱抽象的过程。其次，在获得了所说的三种基本结构以后，我们显然不仅可以以此为基础对先前作为出发点的各个数学理论的结构作出具体的解释（即如实数域是一个完备的阿基米德全序域等），而且也可通过各种新的组合（强抽象）去建构出各种可能的数学结构（可统称为“子结构”）。特别是，由于这是一个逐次建构的过程，因此，布尔巴基学派的工作也就清楚地表明了数学世界的层次性和秩序性，或者说，即是清楚地表明了在各种数学理论之间所存在的明显的“谱系”。

3. 更为一般地说，这事实上就可被看成数学现代发展的一个决定性特点，即其研究对象已经由已给出的（具有明显直观背景）的量化模式过渡到了可能的量化模式。〔从而，对于前述的关于数学的“定义”我们就应当作出如下的补充或修正：数学是（量化）模式的建构和

研究，而且，现代数学的研究对象已经由具有明显直观意义的现实的模式过渡到了可能的模式。〕

特殊地，就可能的量化模式的建构而言，我们并应特别提及公理化方法的现代发展，也即由实质的公理化方法到形式的公理化方法的发展。

具体地说，所谓“实质的公理化方法”即是指把公理系统看成关于特定对象的真理体系。由于所说的对象往往具有明显的直观意义，因此，我们在此就可以相应的直观为基础去开展公理系统，特别是，其中的公理就被认为是关于特定对象的“自明真理”。

例如，欧几里得在他的《几何原本》中所给出的几何系统就是一个实质的公理系统，因为，欧几里得在此就是以现实空间为背景来开展他的几何公理系统的。

与实质的公理系统不同，在形式的公理系统中，公理被认为是关于相应数学对象的隐定义，这就是说，我们在此已不是由所给出的对象去建立相应的公理系统，恰恰相反，在形式系统中我们即是借助于“公理”而构造出了相应的对象，从而，所说的“形式系统”事实上就是一种“假设－演绎系统”，而我们则可以通过这样的方法“自由地”去创造各种可能的量化模式，也即“自由地”去从事各种可能对象的建构与研究。

例如，所谓的非欧几何就是用相反的规定去取代欧氏几何中的平行公理而得到发展的一种几何理论（可参见第六章）。由于非欧几何（相对于欧氏几何）的相容性已经得到了证明，因此，后者也就应当被看成一种可能的几何理论。

容易看出，公理化方法的上述发展事实上也就为我们通过“弱抽象”和“强抽象”的综合应用“自由地”去创造新的数学结构指明了一种具体的形式。

例如，将群和全序集的概念适当地“组合”起来，我们就可获得所谓的“全序群”。这也就是说，全序群应当满足如下的九条公理（其中（1）～（4）条为群的公理，（5）～（8）是全序集的公理，第（9）条则表明了这两种结构是如何联系的）：

（1）（封闭性）集合中任何两个元素 a、b 相加，其和也属于这个集合；

(2)（结合律）加法结合律成立，即有

$a+(b+c)=(a+b)+c$;

(3)(存在零元素)集合中存在一个零元素0,对于集合中任何元素 a,均有

$a+0=0+a=a$;

(4)(存在逆元素)对于集合中任一元素 a,均存在另一元素 $-a$,使得

$a+(-a)=(-a)+a=0$;

(5)(反身性)对于集合中任一元素 a,恒有 $a\geqslant a$;

(6)(传递性)由 $a\geqslant b, b\geqslant c$,可以推出 $a\geqslant c$;

(7)(反对称性)由 $a\geqslant b, b\geqslant a$,可以推出 $a=b$;

(8)(连通性)对于集合中任何两个元素 a、b,恒有

$a\geqslant b$ 或 $b\geqslant a$;

(9)(加法的保序性)由 $a\geqslant b, c\geqslant d$,可以推出

$a+c\geqslant b+d$。

相应地,如果以域和交换群的概念作为出发点,通过

所谓的“复合”,则就可以获得“向量空间”的概念：

所谓域 F 上的向量空间 V,则是指满足下列公理的集合,对于所有 a、$b \in F$,v、$w \in V$,可定义 $av \in V$,并满足

(1) V 是交换群(群的运算为 $+$);

(2) $(ab)v = a(bv)$;

(3) $(a+b)v = av + bv$;

(4) $a(v+w) = av + aw$;

(5) $1v = v$,这里 1 是 F 的乘法单位元。

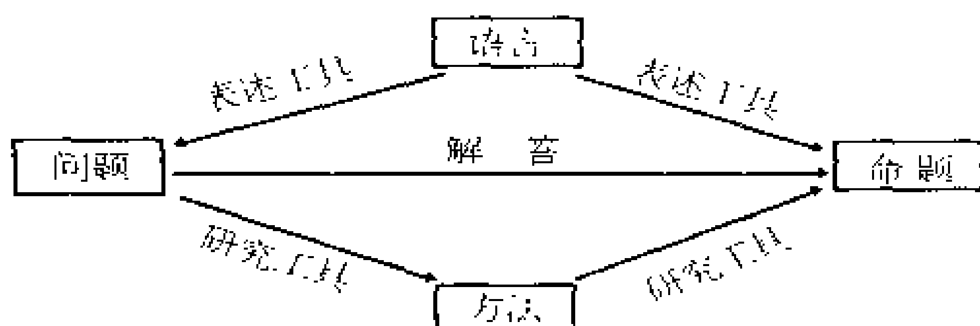
类似地，如果将环与交换群的概念加以复合，就获得了“模”的概念。

综上可见，数学世界的无限丰富性和秩序性也就应当被看成数学对象相对于一般文化物的一个重要特殊性。

最后，应当指出，在充分肯定数学思维自由性的同时，我们也应清楚地认识到：“自由并非任意”。这就是说，对于数学思维自由性的肯定并不意味着我们可以随意地去从事数学的创造。事实上，正如前面所指出的，任何数学创造最终都必须接受社会共同体的“裁决”；而且，作为共同体的一员，各个数学家又必然处于一定的数学传统之中，更不可避免地要受到社会中各种文化和物质成分的影响和限制。对此我们将在下一章作出进一步的分析。

4．最后，应当指明，以上关于数学对象文化性质的分析，也可推广到数学的各个“客观成分”。事实上，按照现代的数学观，特别是从数学活动的角度去进行分析，数学显然不仅包括有作为数学活动“最终成果”的事实性结论，而且也包括有“问题”、“语言”、“方法”等多

种成分，在它们之间并存在有如下的紧密联系：[1]



另外，这里所说的数学的文化性质则就是指：无论就事实性结论（命题），或是就问题、语言和方法而言，都是人类思维的产物；而且它们又都应被看成“社会的建构”，这也就是说，只有为“数学共同体”所一致接受的数学命题、问题、语言和方法才能真正成为数学的组成成分。

① 郑毓信：《数学教育哲学》，第一章，成都，四川教育出版社，1995。

第二章 传统指导下的活动

与第一章不同，本章将分析的着眼点由数学的对象（客体成分）转向了数学活动的主体——数学家。由于在现代社会中数学家必定是作为一定社会共同体的一员从事自己的研究活动的，或者说，他们的数学活动必定是在一定传统指导之下进行的，因此，这也就从又一角度指明了数学文化的涵义，即是指特定的数学传统，也即是指数学家的行为方式。在这一章中，我们将对数学传统、特别是现代数学传统的内涵作出较为具体的分析。

2.1 数学共同体与数学传统

在现代人类文化学的研究中，关于文化的一个较为流行的定义是：这是指由某种因素（居住地域、民族性、职业等）联系起来的各个群体所特有的行为、观念和态度等，也即是指各个群体所特有的“生活（行为）方式”。例如，在对西方160多种关于文化的定义进行剖析后，美国文化学家克罗伯（A.Kroeber）和克拉克洪

(C.Klukhohn)就曾最终对文化作了这样的界定："文化由外显的和内隐的行为模式构成；这种行为模式通过象征符号获得和传递；文化代表了人类群体的显著成就，包括它们在制造器物中的体现；文化的核心部分是传统的观点，尤其是它所带的价值；文化体系一方面可以看做是活动的产物，另一方面是进一步活动的决定因素。"[1]

显然，按照上述的理解，文化的概念即是与群体、传统等概念密切相关的。这也就是说，各种文化是相对于一定的群体而言的，也即是指各个群体所特有的"行为方式"；另外，相对于非物质性的人工生成物而言，这一理解又更为突出地强调了文化的观念性质，也即是指各种特定的传统——尽管后者看不见、摸不着，但却仍然对于相应群体中各个个人的行为有着十分重要的影响。

由于在现代社会中数学家显然构成了一个特殊的群体(可称为"数学共同体")，并有着相对稳定的数学传统，因此，我们也就可以在这第二种意义上去谈及数学文化，也即是指数学家的"行为方式"，或者说，即是指特定的数学传统。

让我们首先通过一个实际事例具体地来说明数学家确实有着自己特殊的"工作方式"。

例如，以下的笑话就常常被用来表明在解决问题时数学家往往采取与一般科学家(例如，物理学家)不同的方法：

有人提出了这样一个问题："假设在你面前有煤气

---

① 转引自汪秉彝等："再论跨文化数学教育"，载《数学教育学报》，1999年，第二期。

灶、水龙头、水壶和火柴，你想烧些水，应当怎样去做?”对此某人回答道：“在壶中放上水，点燃煤气，再把壶放到煤气灶上。”提问者肯定了这一回答，然后又追问道：“如果其他的条件都没有变化，只是水壶中已经有了足够多的水，那你又应当怎样去做?”这时被提问者往往会很有信心地回答道：“点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上。”但是，提问者指出，这一回答并不能使他感到满意，因为“只有物理学家才会这样做，而数学家们则会倒去壶中的水，并声称他已把后一问题化归成原先的问题了。”

这也就是说，这正是数学思维的一个重要特点：在解决问题时，数学家们往往不是对问题实行直接的攻击，而是不断地对此进行变形，直至最终把它转化成了某个（或某些）已经得到解决的问题。

与上述的虚构事例相比，以下的由英国著名数学家齐曼（C. Zeeman）讲述的真实故事可以说更为鲜明地表明了数学家的专业分工对其“生活方式”确实具有十分重要的影响——尽管齐曼在此是就不同领域中的数学家进行比较，而并非是以全体数学家作为分析的对象。

齐曼所在的沃力克大学（Warwick University）数学研究所常常组织大型的学术活动，即选定某一主题，并邀请世界各地在这一方向上工作的5至10名著名数学家前来访问讲学。通过为这些访问学者安排食宿，齐曼的秘书发现，不同专业的数学家具有不同的“生活方式”。例如，几何学家和拓扑学家通常由他们的家属陪同，在为他们举办的各种聚会上所逗留的时间又常常超过原先

的计划；代数学家则经常没有家属陪同而单独行动，但他们表现出很强的计划性，甚至早在两三年前就已确定了到达的日期；与此相反，分析学家则可说"最不可靠"，他们从不按事先商定的日期抵达，原定与家属同来最终则又往往起了变化……因此，齐曼最终断言："他们事实上属于完全不同的心理类型。"

(颇有兴味的是，笔者最近在一篇报告文学上读到了以下的描述，尽管它所论及的是体育运动员而并非数学家，但其结论在更为一般的意义上却是完全一致的："一如舞蹈演员走路必须挺胸收腹踏着八字脚那样，人的习惯都是职业铸成。你看篮球运动员总是大步慢晃足弓富有弹性；射击运动员每逢说话很平气镇定，你不问话他不言声；游泳运动员在生活中也时不时虚抖双臂常把肌肉放松；健美运动员正相反，双臂偏要两边架开半握拳，似乎惟有时时紧张起来才有纠纠雄风；自行车运动员总是挺不直腰杆了，往往脊梁如弯弓少有不罗锅驼背的；足球运动员上下肢动作特协调，但总以为四周空旷所以一说话面部表情很夸张；排球运动员平日甩小臂做手势偏多，随手打孩子一巴掌过三天还喊疼；汽车摩托车运动员上了岁数那作风就像一位老工人，生活机械而严谨；……举重运动员哪怕上了岁数也忍不住伸出一双大手在空中恶狠狠地抓，仿佛到处都是钢铁的杠铃；……体操运动员到死不乐意留长发，他认定小平头就是全世界最美的发型。干过体育的人转行到别的单位通常人缘不错，说粗话多脾气急躁，喜欢集体行动，重视协作有竞争精神，比较关心他人，渴望辉煌却也容易犯错误……总之，

童年少年青年时期的专项职业造就了人的某种特色并将伴随人的一生，他自个儿往往却不易察觉。")

当然，具体的事例不能代替理论的分析，而为了进一步加深对于"数学共同体"和"数学传统"的理解，我们则可首先对现代科学哲学中所广泛应用的"科学共同体"和"范式"的概念作一简要的说明。

具体地说，由于美国著名科学史学家、科学哲学家库恩（T. Kuhn）的积极倡导，"科学共同体"的概念在现代获得了人们的广泛重视。从本质上说，这一概念的提出即是从社会学的角度对科学活动进行分析的一个直接结果。这也就是指，在实际生活中，科学家总是作为科学共同体的一员从事自己的科学活动的。库恩并曾对"科学共同体"的概念作了如下的具体说明：科学共同体是由一些学有专长的实际工作者所组成的，他们由所受教育及专业训练的共同因素结合在一起。他们自认为、也被人认为专门探索一些共同的目标……这些共同体并具有这样的特点：内部交流比较充分，专业方面的看法也比较一致。[①]

由"科学共同体"的概念出发，库恩又进一步提出了"范式"的概念："范式是一个科学共同体的成员所共有的东西；反过来，科学共同体正是由具有同一范式的成员所组成的。"[②] 由此可见，按照库恩的观点，在"科学共同体"和"范式"之间事实上就存在有某种"等价"

---

① T. Kuhn:《The Structure of Scientific Revolution》, The Universtity of Chicago Press, 1970, P. 177.

② 同①，第176页。

的关系，这也就如库恩本人所指出的："在我的《科学革命的结构》这本书中，'范式'一词，无论在实际上或是逻辑上，都很接近于'科学共同体'这个词。"[①]

当然，"科学共同体"和"范式"毕竟是两个不同的概念，特别是，前者主要是从社会学的角度进行分析的结果，也即是与"个体"的概念直接相对立的；与此相反，库恩所说的"范式"则是指科学共同体所共有的东西，包括知识成分和观念成分。

事实上，对"范式"的概念库恩曾给出过多种不同的解释：即如科学共同体所共有的"传统"，科学共同体所共有的"模型或模式"，科学共同体"把握世界的共同理论框架"，科学共同体共有的"理论和方法上的信念"等；后来，作为一种"澄清"，库恩又提出了"专业质基"的概念，并指出后一概念主要包括以下四种成分：①共有的符号概括。诸如 $F=ma$ 这样的基本公式，它指明了基本的概念和符号。②关于特定模型的共同信念。例如，地心说和日心说就是关于两种不同模型的信念。③共有的价值观念。也即关于理论的表述方式、研究问题与研究方法的评价标准。即如什么样的问题被认为是有价值的。④范例。这是指某些具体的实例，它们被认为是成功研究的典范。

显然，对照库恩的工作，我们也可明确提出"数学共同体"和"数学范式"的概念，并对"数学范式"的内容作出进一步的具体分析。

---

① 库恩：《必要的张力》，中译本，第291页，福州，福建人民出版社，1981

例如，在一篇题为“库恩的理论与数学：关于数学‘新编年史’的讨论”的论文中，德国学者曼赫顿斯（H. Mehrtons）就曾依据库恩关于“专业质基”的论述，对“数学范式”（或者说，数学的“专业质基”）的基本内容进行了分析。曼赫顿斯认为，数学的“专业质基”主要包括以下几种成分：①关于特定模型的共同信念，也即关于数学的“形而上学”观念。即如“数学是量的科学”，以及逻辑主义、直觉主义的数学观等。②共有的价值观念，也即关于理论的表述方式、研究问题与研究方法的评价标准。即如什么样的表述被认为是恰当的，什么样的问题被认为是有价值的，什么样的证明被认为是严格的，等等。③范例，即成功实践的典型事例。④共有的概念和符号。就其在数学研究中的应用而言，这是与库恩所说的“共有的符号概括”较为接近的。⑤标准的问题。这是指某些在数学研究中经常出现的问题，即如一般化、公理化等。曼赫顿斯指出，上述的各个成分并非截然分开、互不相关的，例如，所谓的“标准的问题”事实上就可看成关于问题的一种评价标准；另外，我们当然也可对所说的各种成分作出进一步的细分。

曼赫顿斯的上述工作是有一定意义的；但是，笔者以为，我们在此又不应将库恩的思想机械地推广到数学的领域，而应更加注意吸取其中的精华。具体地说，笔者以为，库恩关于“科学共同体”和“范式”等概念的论述其核心就在于这样的思想，即是突出强调了群体对于个体的科学活动具有重要的规范和启发作用，而且，所说的规范和启发作用主要地又是通过一些基本的理论

观点或信念体现出来的，尽管后者未必是成文的规定，相应的共同体成员也未必对此有着自觉的认识。正是基于这样的认识，笔者认为，我们在此也就可以明确地提出“数学传统”的概念：这即是指相应的数学共同体在什么是数学和应当如何去从事数学研究这样一些基本问题上的共同认识，也即是一种总的观念或信念；另外，就数学传统对于个别数学家研究活动的影响而言，则又可以归结为以下的事实：数学家的研究活动总是在一定传统之中进行的，这也就如库恩所指出的，（常规意义上的）科学活动就是“范式指导下的活动”。

就“数学传统”的主要内容而言，我们并可作出如下的具体分析：

（1）核心思想。这是指关于数学本质的总的认识，也即是总的数学观，并就提供了关于“什么是数学”的问题的具体解答。由于总的数学观在很大程度上决定了我们“应当如何去从事数学研究”，因此，在这样的意义上，这就可以被看成“数学传统”的核心成分。

例如，就基本的数学观而言，一个特别重要的问题就在于：数学究竟应被看成一般的经验科学，还是有其一定的特殊性？显然，这也就直接涉及到了我们应当怎样去认识数学与真实世界的关系？进而，这就关系到了对于数学价值的认识。

（2）规范性成分。这是指应当如何去从事数学研究的一些具体规范或准则。各个数学家只有按照这些规范或准则去进行研究，他的工作才有可能得到数学共同体的承认，从而，它们就具有较强的制约作用。

从最一般的角度说，以下即是数学研究的基本规范：

数学家的工作目标是要获得这样的命题，它们是借助于为数学共同体一致接受的语言得到表述的，是对于为数学共同体一致接受的问题的解答，并建立在为数学共同体一致接受的论证之上。

（3）启发性成分。与上述规范性成分相比，这里所说的启发性成分并不具有很强制约性，然而，这些成分对于新的研究活动仍有着重要的启示意义或潜在影响。

例如，从解题活动的角度看，著名数学家、数学教育家波利亚（G. Polya）所说的"数学启发法"显然就属于这里所说的"启发性成分"的范围。用国外学者的话来说，这也就是指，如果你已经有了自己的想法，则就完全可以按照自己的想法去行事，而未必一定要顾及（或者说，可以暂时不去顾及）任何一种数学启发法；但是，如果面对问题却感到一无所措，那么，这里所给出的问题和建议或许（而不是"一定"——这正是启发性的一个主要特征）可以给你一定的帮助。

另外，就研究方向的选择而言，我们则又可以特别提及所谓的"数学的精神"。例如，日本数学家、数学教育家米山国藏就曾提出过如下的七种精神：①应用化的精神；②扩张化、一般化的精神；③组织化、系统化的精神；④致力于发明发现的精神；⑤统一建设的精神；⑥严密化的精神；⑦"思想的经济化"的精神。[①] 由于这些"精神"只是表明了什么样的研究是应当重视的，而

① 米山国藏：《数学的精神、思想和方法》，第一章，成都，四川教育出版社，1986。

不具有很强的制约性，因此，它们也都属于“数学传统”中的启发性成分。

显然，以上的分析即就更为清楚地表明了“数学传统”对于相应共同体中各个成员的研究活动确实有着十分重要的规范和启示作用。也正因为此，如果数学主要地即应被看成人类的一种创造性活动，那么，其中就不仅应当包括第一章中所已提到的各种“知识性（客体）成分”，即如“命题”、“问题”、“语言”和“方法”等，而且也应包括所说的“数学传统”——后者就组成了数学（活动）的“观念成分”。

就“数学共同体”和“数学传统”的把握而言，我们还应指明：

第一，即如库恩对于“范例”的强调所清楚地表明的（值得指出，“范式”这一名词就是由“范例”演变而来的），“范式”不应被看成某种抽象的教条，恰恰相反，“最基本的是，范式是指某些具体的科学成就事例，是指某些实际的问题解答，科学家认真学习这些解答，并仿照它们进行自己的工作。”[1] 这就是说，正是范例为科学家们（尤其是新手）提供了可资借鉴的实例，而又正是通过这些实际例子的学习与模仿，他们逐渐（有意识或无意识地）形成了关于应当如何去从事相应的科学研究的总的观念，从而真正成为相应共同体中的一员。

显然，我们也应在同样的意义上去理解和把握所说的“数学传统”，特别是，我们即应清楚地认识到：“数

---

① 库恩：《必要的张力》，中译本，第346页，福州，福建人民出版社，1981。

学传统”往往没有得到明确的概括和表述，相应共同体中的成员对于所说的“数学传统”往往也不具有自觉的认识，而且与一般文化传统一样，对于数学传统的继承主要地也是一个潜移默化的过程。

第二，按照我们在此的用法，“数学传统”是一个相对的概念，也即在空间和时间的跨度上均有较大的自由度。例如，我们既可将所有的数学工作者都看成属于同一个数学共同体，也可按照专业的区分将其划分成若干个较小的团体，还可将同一学派或同一研究集体作为基本的分析单位；另外，尽管通常认为“传统”应当具有较长的时间跨度，但是，在此显然又不可能为所说的“数学传统”在时间上指定一个绝对的下限。

第三，尽管“数学传统”是指共同体的成员所共有的观念和信念，但是，我们在此也不应把数学共同体看成铁板一块，即其各个成员都有着完全一样的观念和信念，毋宁说，我们在此即应清楚地看到在共性与个性之间所存在的辩证关系。具体地说，“数学传统”作为共同体成员所共有的东西，显然是其共性的表现；但是，除这种共性以外，我们又应当看到在各个个别数学家之间也必然存在一定的差异，这就是说，各个数学家与共同体的联系可能有紧有松，而且，即使是同一数学共同体的成员在观念上也必然存在一定的差异，包括观念的稳定程度等。值得指出的是，从更深的层次去分析，正是这种共性和个性的辩证关系为数学的进一步发展、特别是重大的突破提供了必要的内在机制，因为，如果共同体的任何成员都置已有的传统于不顾，即随心所欲地去

从事自己的“研究”，那么，不仅数学的发展将不再有任何连续性，而且数学本身也将丧失作为一门科学所必须具有的“客观性”。反之，如果共同体的成员在任何情况下都“顽固地”去坚持已有的传统，在数学中也就不可能有重大的突破，包括数学传统自身的发展与革新（对此可参见下一章的论述）。

从而，总的来说，这就正如库恩所指出的：“并不存在这样的选择规则，在科学家学术生涯所可能遇到的各个具体场合，这些规则都足以导致所希望的个体行动”；“每个人在相互竞争的理论之间进行选择，都取决于客观因素和主观因素的混合，或者说共有准则与个人准则的混合。”[②] 特殊地，“如果一个科学共同体的成员都以同样……的方式应用（判断）准则的话，这一团体的事业就中止了。”[③]

最后，应当指明，以上的分析显然也就从一个侧面表明了数学活动不应被看成一种完全孤立的活动，特别是，以下的“图像”更不能被看成实际数学活动的真实写照：“数学家总是一个人坐在书桌前冥思苦想，即使取得了成功他们也只有孤芳自赏，但更多的却是‘花几天或几周时间完全纠缠于一个问题，几乎排除一切活动所感到的孤寂’，以及很可能‘费尽了九牛二虎之力，而结果一事无成、前功尽弃’。”[④] 与此相反，我们应当明确肯

---

① I. Lakatos & A. Musgrave:《Criticism and the Growth of Knowledge》, Cambridge University Press, 1970, P. 238.

② T. Kuhn:《The Essential Tension》, The University of Chicago Press, 1979, P. 319.

③ 同①，第262页

④ A. 哈蒙德：“数学——看不见的文化”，载斯蒂恩主编《今日数学》，第31－32页，上海，上海科学技术出版社，1982

定存在于各个数学家与群体之间的重要联系，而这又不仅是指如下的明显事实，即如个人的研究工作必然以对前人研究成果的继承作为必要的前提，各个数学家又必须通过与群体的联系才能及时了解最新的发展动态，掌握新的、更为有效的方法，等等，而且也是指，数学家总是处在一定的传统之中，而后者作为共同体共有的"生活方式"对其研究活动有着潜移默化、但又是十分重要的影响。从而，数学工作者就应十分注意对于数学传统的学习和继承，并保持与相应群体的密切联系，也即应当成为数学共同体的积极成员（在2．3节中我们还将进一步论及合作研究的重要性）。

当然，就对于已有传统的学习和继承而言，一个十分重要的问题就在于如何作好由不自觉状态向自觉状态的转变，而这又不仅关系到了我们能否更好地以相应的观念去指导自己的行动，而且也直接关系到了能否在适当的时刻突破旧传统的束缚，也即对已有的传统作出必要的变革或更新。事实上，由上面的分析我们已经可以看出，数学传统的变革也应被看成数学历史发展的一个重要内涵，并就为整个数学的革命性变革提供了必要的条件。

2．2　不同的数学传统

就数学的实际发展历史进行考察，可以清楚地看到如下的基本事实，即人类历史上曾存在多种不同的数学传统，而这主要地又不是指由于专业分工或时间顺序上的先后所造成的差异，而主要是一种横向的比较。例如，

就古代而言，我们显然可以提及古希腊的数学传统与中国古代的数学传统；进而，就微积分理论的历史发展而言，我们又可看到以牛顿为首的“英国学派”与以莱布尼兹为主要代表的“大陆学派”的尖锐对立；再者，又如第一章中所已提及的，如果就对无限的态度进行分析，在数学家中则可作出所谓的“实无限论者”和“潜无限论者”的区分。对于上述的前两者我们将在第二部分中作出较为详细的介绍，以下仅以数学基础研究中的不同传统、特别是现代数学基础研究中不同学派的对立（这就直接涉及到了对于无穷的不同态度或立场）为例来对数学中的不同传统作出简要的说明。

具体地说，所谓的“基础研究”在数学中应当说也有着悠久的历史。由于数学是逻辑地展开的，因此，就如罗素（B. Russell）在《数学哲学导论》中所指出的，数学的研究可以沿着两个相反的方向进行：或者是研究“从我们开始所肯定的东西能定义或推演出什么”，从而逐步趋向更大的复杂性；也可追问我们所肯定的基本概念和命题“能从什么更普遍的概念与原理定义或推演出来”，从而进入愈来愈高的抽象和逻辑的单纯，而后者就是一般意义上的基础研究。

事实上，如果就数学的实际发展历史进行考察，在所说的基础研究中我们也可看到两种不同的传统：首先，由于“不可公度线段”（即如正方形的边与对角线）无法表示成整数的比，因此，古希腊数学家就把目光转向了几何，也即认为应当以几何学为基础来从事全部数学的研究。例如，正是基于这样的认识，在古希腊人那里，

数量就往往是依据它们的几何意义来命名的（即如平方、立方等），数学定理的表述也常常采取几何的形式。由于古希腊的数学传统得到了广泛的传播并逐渐为人们所接受，因此，上述这种以几何作为全部数学基础的作法也产生了十分深远的影响。这就正如著名数学史学家克莱因（M. Kline）所指出的，在欧多克斯（公元前408左右～公元前355，是古希腊最伟大的数学家之一，他最早解决了如何用几何来从事无理数研究的问题）以后的两千年间，"几何学变成几乎是全部严密数学的基础。"[①] 例如，直至15世纪，仍有很多数学家认为研究三次以上的方程是"荒唐可笑"的，因为它们并不具有明显的几何意义。

然而，自文艺复兴时期起，上述的情况逐渐发生了变化，特别是，代数开始摆脱几何学的束缚而取得了独立的发展。例如，尽管三次以上的方程无法赋予直接的几何解释，数学家们仍然开始了高次方程的研究。另外，在笛卡尔那里，先前那种以几何作为全部数学基础的作法更被颠倒过来了。笛卡尔明确地指出，"代数居于数学其他各分支的最前列，它是逻辑的延伸，是处理量的一门有用的学科，因此从这个意义上来说，这甚至比几何还具有根本的意义。"这样，笛卡尔就"第一个把代数放在学术系统的基本地位上"。[②] 特殊地，也正是基于这样的认识，笛卡尔创立了解析几何这样一门用代数方法来

---

① 克莱因：《古今数学思想》，第一册，第56页，上海，上海科学技术出版社，1979。

② 克莱因：同①，第328页。

从事几何学研究的新兴学科；而后者的成功则又进一步强化了代数学的基础地位。这也就如克莱因所指出的：“从古希腊时代到1600年，几何统治着数学，代数居于附庸的地位。1600年以后，代数成为基本的数学部门。”

相对于上述的一般基础研究而言，现代的数学基础研究又有其特定的历史背景。追根溯源地说，这就是所谓的“分析的严格化运动”。由于在很长时期内微积分理论一直缺乏严密的逻辑基础，因此，在18世纪就曾出现过这样的奇特现象：“一方面是纯粹分析及其应用领域内一个接一个的光辉的发现；另一方面，与这些奇妙的发现相对照的则是基础的含糊性。”当然，这种不协调的现象是不可能一直延续下去的，因此，从19世纪上半叶开始，就出现了分析的严格化运动，而其直接目标就是为微积分理论奠定一个可靠的理论基础。但是，我们究竟应当到哪里去寻找所说的可靠基础呢？在很大程度上也就是由于上述的后一种传统的影响，大多数数学家把目光转向了算术理论。另外，克莱因则曾对当时的形势作了如下更为具体的分析：“这种决心的出现大概是由于企图把分析奠基于几何之上的希望……因18世纪分析发展中日益增长的复杂性而受到破灭所致。不过高斯早在1799年就已表示了他对欧氏几何真理性的怀疑，而且在1817年他就认定真理只存在于算术之中。此外，甚至在高斯和其他作者关于非欧几何的早期著作中就注意到欧

---

① 克莱因：《古今数学思想》，第一册，第25页，上海，上海科学技术出版社，1979

② F. Waisman: 《Introduction to Mathematical Thinking》, Frederick Ungar, 1951, P. 15

氏几何发展中的缺陷，因此很可能就是这两个因素造成了对几何的不信任而决心把分析奠基在算术概念之上。”[1]

从实际的历程看，分析的严格化经历了这样三个阶段：①以实数理论为基础建立起严格的微积分理论，这一工作是由波尔查诺（B. Bolzano）、柯西（A. Cauchy）和外尔斯特拉斯（K. Weierstrass）等人完成的。其直接结果就是严格的极限理论完全取代了原来的无穷小分析。②以算术理论为基础建立起严格的实数理论。1872年，外尔斯特拉斯、康托和戴德金（R. Dedekind）几乎同时完成了建立严格的实数理论的工作，即是以有理数理论为基础建立起了实数理论，由于后者又可化归为自然数理论，这样，微积分理论就被“算术化”了。（应当指出，在由有理数理论去建立实数理论的过程中，事实上还用到集合论的概念和方法。但人们只是在后来才清楚地认识到了这样一点。）③算术理论的公理化。这一工作的最终成果就是所谓的“皮亚诺算术公理系统”。由于自然数理论可以从这一公理系统得到建立，因此，在当时的数学家看来，皮亚诺的算术公理系统事实上就构成了全部数学的基础。

对于数学理论的这种“算术化”，大部分数学家是十分满意的；但是，从基础研究的角度看，我们在此显然又可提出这样的问题：什么是算术理论的合理基础？或者说，究竟什么可以被看成全部数学的最终基础？正是围绕这一问题，一些学者进一步从事了数学基础的研究，

---

① 克莱因：《古今数学思想》，第四册，第2页，上海，上海科学技术出版社，1979。

而又正是因为在这一问题上的观点分歧，就直接导致了在基础问题上逻辑主义、直觉主义和形式主义等三大学派的严重对立。

另外，就数学基础在现代的开展而言，我们在此还应特别提及由于集合论、悖论（特别是罗素悖论）的发现所导致的"（第三次）数学基础危机"。具体地说，现代数学基础研究的初步成果、特别是逻辑主义的研究表明，集合论事实上构成了全部数学的逻辑基础；然而，集合论悖论的发现却清楚地表明了集合论本身并不是完全可靠的，从而就在数学家中引起了极大的困惑和不安，也即对整个数学的可靠性构成了极大的威胁。显然，后者事实上也就更为清楚地表明了深入开展基础研究的必要性和紧迫性，并在很大程度上决定了现代数学基础研究的性质，即其主要地是一种批判和重建的工作。这就是说，对于已有数学理论和方法可靠性的忧虑即就构成了现代数学基础研究的实际出发点，从事这种研究的人并希望能通过自己的补救性工作一劳永逸地解决数学的可靠性问题。这也就正如贝纳塞洛夫（P. Benacerraf）和普特南（H. Putnam）在对逻辑主义等学派的基础研究工作进行总结时所指出的：他们所考虑的主要是"'合法'的数学应当是什么样的?"也即"什么样的概念和方法是合法的，从而可以正当地加以使用。"[1]

综上可见，现代的数学基础研究事实上即就直接涉及到了"什么是数学"和"应当如何去从事数学研究"

---

① P. Benacerraf & H. Putnam:《Philosophy of Mathematics, Selected Readings》, Pretice－Hall Inc., 1964, P. 2.

这样两个基本问题；而又正是由于对这些问题有着不同的看法，在数学基础的现代研究中就逐渐形成了逻辑主义等不同学派，也即形成了不同的数学传统（或研究范式）。

具体地说，以弗雷格（G. Frege）和罗素为主要代表的逻辑主义者认为逻辑构成了全部数学的最终基础；也即认为我们可以以逻辑的概念和法则为基础去开展出全部数学；但是，为了避免悖论，在从事后一工作，我们又应严格遵循若干基本的原则，即如“恶性循环原则”等，而这事实上也就是对数学中先前所经常采用的一些方法（即如所谓的“非直谓定义”等）的直接禁止。从而，按照逻辑主义的规范所重建的数学就并非是与原来的数学完全相同的；但是，由于逻辑主义者对已有的数学理论和方法（包括无限的概念和方法）采取了较为保守的立场（从而，他们就是所谓的“实无限论者”，也即认为在数学中我们可以自由地去应用各种无穷的概念和方法），因此，他们又力图通过引进一些新的公理（特别是“可化归公理”）来调和上述的不一致性，但这又招致了严重的批评。另外，关于逻辑主义的实际出发点（特别是所谓的“无穷公理”）能否被看成属于逻辑的范围也引起了广泛的争论。

其次，与逻辑主义者较为保守的立场相对立，以荷兰数学家布劳维尔（I. Brouwer）为首的直觉主义者对已有的数学理论和方法采取了彻底的批判态度。直觉主义者认为，数学的最终基础是所谓的“纯直觉”（“原始数学直觉”），从而，就只有直觉上可构造的数学概念和方

法才是可接受的，而一切非构造性的数学概念和方法则应从数学中完全排除出去。例如，正是从这样的立场出发，直觉主义者对排中律在数学中的应用与实无限的概念和方法就采取了绝对否定的态度，尽管后者可能造成已有数学的“支离破碎”。这就正如直觉主义的另一主要代表人物黑丁（A. Heyting）所指出的：“必须把由于直觉主义的反对而造成的数学的支离破碎，看成是我们观点的一个不可避免的结论。”[1] 另外，作为一种“补偿”，直觉主义又积极从事了发展“直觉上可构造的”数学理论的工作，这就是所谓“直觉主义数学”。后者与已有的数学（他们称之为“古典数学”）当然是很不相同的，特别是，在直觉主义数学中，无穷只能被看成一种过程、一种永无止境的过程，而不能被看成是完成了的对象从而，从无穷的角度看，直觉主义者所采取的就是一种“潜无限论”的立场。直觉主义对于古典数学的彻底否定以及直觉主义数学能否被看成是完全可靠的问题也在数学家中引起了很大的争论。

第三，作为对于逻辑主义和直觉主义的一种反对，著名数学家希尔伯特（D. Hilbert）提出了自己的基础研究规划，这就是著名的“希尔伯特规划”：首先，我们应当把包含有无穷元素的数学理论组织成所谓的形式系统，也即应当完全抽去其中的意义而将其看成一种纯粹的符号系统——在其中我们只是按照明确指定的法则去对给定的符号或符号串进行机械的组合或变形；其次，我们

---

1 A. Heyting: 《Intuitionism: An Introduction》, North-Holland, 1956, P. 10.

又应用有限的方法去证明所说的形式系统是无矛盾的。由于有限的方法被认为是完全可靠的，而系统的无矛盾性则又表明了无限元素作为工具的可靠性（从而，从无穷的角度进行分析，希尔伯特就可被称为"方法论的实无限论者"，这也就是指，尽管无限不能被认为具有任何真实的意义，但是，出于方法论的考虑，即如为了使证明能够得到简化，我们仍可将其作为"理想元素"引入到数学之中）。因此，在希尔伯特看来，一旦上述规划得到了实现，数学的基础问题（或者说，数学的可靠性问题）就彻底地得到了解决。

由于著名逻辑学家哥德尔（K. Godel）在1931年证明了著名的"不完备性定理"，希尔伯特规划已被证明不可能在原来意义上得到实现；但是，由希尔伯特所提出的关于应当把数学理论看成毫无意义的形式系统的思想仍然产生了广泛的影响，并事实上成为了对于当代数学家有着重要影响的一个普遍思潮，也即成为了一个具有较大覆盖面的数学传统。后者就是一般意义下的形式主义。例如，作为形式主义在现代的主要倡导者之一，美国著名数理逻辑学家柯恩（P. Cohen）就曾明确指出："数学只是一种纯粹的符号游戏，而这种游戏的惟一要求就是它不会导致矛盾。"①

综上可见，逻辑主义等学派关于"什么是数学"与"应当怎样去从事数学研究"等基本问题上的看法就是很不相同的，从而，它们事实上就代表了数学基础研究中

---

① P. Cohen:《Set Theory and the Continuum Hypothesis》, Amsterdam, 1966, P. 154.

的不同传统。值得指出的是，这三个学派曾围绕上述各个问题展开了激烈的争论。例如，曾一度信奉直觉主义观点的著名数学家外尔（C. Weyl）就曾对希尔伯特的形式主义观点提出了如下的批评："希尔伯特的数学也许是一种美妙的公式游戏，甚至比下棋更好玩；但是它与认识毫无关系，因为那是公认的，它的公式并不具有可以借以表示直观真理的那种实在意义。"反过来，希尔伯特则曾明确提出："禁止数学家使用排中律，就像禁止天文学家使用望远镜或拳师使用它的拳头。"这也就是说，在希尔伯特看来，直觉主义的上述立场事实上就是对于科学的一种背叛。[①] 从历史的角度看，上述的对立曾在很大程度上加重了由于集合论悖论的发现所导致的"危机感"。例如，这就正如弗兰克尔（A. Fraenkel）和巴－希勒尔（Y. Bar－Hillel）所指出的："促使我们谈及第三次基础危机的，远远不只是悖论在集合论基础、从而也就是在分析中的出现，而主要是由于以下的事实：在克服悖论的各种尝试中，揭示了许多在最基本的数学概念（诸如自然数的概念）和意见上的深刻的令人吃惊的分歧。"[②] 另外，克莱因也曾这样写道："数学目前的困境是由于有许多种数学而不是只有一种，而且，由于种种理由每一种都无法使对立学派满意。"[③] 显然，就我们目前的论题而言，这也就更为清楚地表明了逻辑主义等学派

---

① 克莱因：《古今数学思想》，第四册，第317、322页，上海，上海科学技术出版社，1979。

② A. Fraenkel & Y. Bar－Hillel: Foundations of Set Theory, North－Holland, 1958, P. 15.

③ 克莱因：《数学：确定性的丧失》，第4页，长沙，湖南科学技术出版社，1997。

确实代表了关于数学研究、特别是数学基础研究的不同传统。

最后，应当提及的是，如果就数学对象的本体论问题进行分析，以上所说的形式主义即可说是代表了一种非实在论的立场，从而就是与第一章中所提及的实在论立场直接相对立的，因为后者的核心观点即是认为数学对象构成了一种不依赖于人类思维的独立存在。尽管所说的实在论和反实在论主要地都是关于数学本体论问题的一种哲学观念，但是，由于这也直接涉及到了“什么是数学”和“应当如何去从事数学的研究”等基本问题，即如按照实在论的观点，数学研究主要地是一种发明的活动，从而我们就不能任意地去从事数学的创造，因此，其对于实际的数学活动也有着十分重要的影响。例如，在60年代后期由于连续统假设相对独立性的证明而兴起的集合论研究的新高潮中，我们就可清楚地看到形式主义和实在论的上述对立所造成的重要影响。[①] 从而，在较为宽松的意义上，我们也就可以把这两者看成是两种不同的数学传统。

2.3　趋向一致的现代数学传统

从文化的角度进行分析，数学发展史上多种不同传统的存在显然是一个十分自然的现象，因为所谓的“时空相对性”即可被看成各种文化形式的一个共同特征，这也就是说，人类由于生活地域或整体性文化环境的不

① 可参见夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，第四章，北京，人民出版社，1986。

同必然会形成各种不同的“区域文化”，而且各种文化形式又必然地有一个历史的发展和演变的过程。从而上述多种不同数学传统的存在，事实上也就为数学文化史的深入研究提供了一个十分重要的课题，即这种种不同的数学传统是如何形成的，特别地，什么是其形成和进一步发展的特定社会-文化环境？

对于上述课题我们将在第二部分作出初步的探讨，在此则将首先指明数学传统现代发展的一个重要趋势，这就是指，如果从最为宏观的角度去进行分析，也即完全不考虑由于专业分工所造成的区别，而仅仅着眼于处于不同地域或不同文化环境之中的一般数学家，那么，这就是数学现代发展的一个重要特征，即在世界范围内出现了数学传统渐趋一致的重要走向。由于数学传统的这种一致化趋势显然是与一般文化的多样性（或者说，地域相对性）直接相对立的，因此，这也就从又一角度清楚地表明了数学作为一种文化形式的特殊性。〔应当指明，如果从纵向、而不是从横向的角度去进行分析，那么，我们在此又必须明确肯定现代数学传统的历史性质，特别是，就对于数学相对独立性的肯定而言（对此可参见以下的论述），现代数学传统即是与先前所存在的各种数学传统、包括西方数学传统直接相对立的。也正是从这样的角度去进行分析，非欧几何及四元数等理论在数学中地位的确立，在很大程度上就可被看成对现代数学传统的形成发挥了特别重要的作用，这就是说，现代数学传统是在过去的近百年时间中逐渐地形成的。〕

对于所说的现代数学传统可以作出如下的概述：

1. 核心思想，也即关于“什么是数学”的问题的总的看法。

首先，我们在此即应明确肯定“数学是模式的科学”。这就是说，在数学中我们即是通过相对独立的（量化）模式的建构、并就以此作为直接对象来从事客观世界量性规律性的研究，而且，现代数学的研究对象已经从具有明显直观背景的模式扩展到了可能的模式。

由于在第一章中我们已经对“数学是模式的科学”的观点作了较为详细的论述，在此就仅限于对数学研究的“自由性”作出如下的进一步分析。

值得指出的是，早在 1883 年，著名数学家康托就曾作出如下的明确断言：“数学的本质在于自由。”他写道：“由于数学区别于其他科学的这一特点，以及由此而得出的相对自由性及其研究方法的解释，它特别适用于自由数学的名称，如果可以选择的话，我倾向于用这一名称去取代流行的‘纯粹’数学的名称。”[①]

正如第一章中所已指出的，由于模式的建构即意味着与真实在一定程度上的脱离，从而就为数学的自由创造提供了极大的可能性，因此，这事实上就可被看成所说的数学研究的“自由性”的最基本涵义，即数学家可以自由地去创造自己的概念，而无须随时去顾及它们的真实意义。（从而，在所说的意义上，数学显然也就不应简单地被看成是一种“经验科学”。对此可参见以下的论述。）

① 道本：《康托的无穷的数学和哲学》，第 62 页，南京，江苏教育出版社，1989。

当然，又如第一章中所已提及的，我们在此不应将所说的"自由性"简单地等同于"任意性"，勿宁说，尽管数学家在从事创造活动时无须随时去顾及它们的真实意义，但是，这又并非一种完全任意的活动，而是存在有一定的规范或指导性原则，对此我们将在以下作出进一步的分析。

其次，除上述的基本涵义外，现代数学的自由性还表现在对于具体数学工作与相应哲学思想的明确区分，这就是说，尽管具体的数学工作总是（自觉或不自觉地）在一定哲学思想指导下发展起来的，但是，我们又不应把对具体数学工作的评价与对相应哲学思想的评价简单地等同起来，特别是，我们不能因为反对某种哲学思想而否定相关的数学工作。

例如，通过引证数学史上著名人物的工作，康托指出，数学已被证明有权从形而上学的桎梏中得到自身的解放，因为，任何限制或不自然的哲学前提必将延缓、甚至阻碍数学的发展。[①]

一般地说，这更被认为是数学发展的一条基本规律，即"一旦一个数学概念在数学文化中提出，它的可接受性最终将取决于这一概念富有成果的程度；它将不会由于它的起源、或因为形而上学或者其他的标准谴责它是'不真实的'而永远遭到拒斥。"（可参见附录一）从而，对于哲学思想的"容忍"就已成为现代数学家的普遍态度。

① 道本：《康托的无穷的数学和哲学》，第62页，南京，江苏教育出版社，1989

由于哲学思想显然与我们所说的“数学传统”有着密切的联系，因此，所说的“容忍”在一定程度上就意味着对于已有传统的自觉反思和批判，而这显然也就是数学传统何以能得到发展和突破的一个重要原因，另外，又如第一章中所指出的，后者则就为数学中的革命性变革提供了必要的内在机制。

特殊地，我们在此并可专门提及现代数学家在基础问题上所表现出的“开放”态度。例如，就现今的情况而言，某些对直觉主义数学观持激烈批评的人在自己的研究中完全可能致力于构造性的证明；同样地，一些倾向于直觉主义数学观的人在自己的数学论文中也完全可能采取严格的形式主义表述方法，等等。更为一般地说，正如著名数理逻辑学家王浩所指出的，随着数学的发展，在构造性数学与非构造性数学之间已出现了进一步的分化，即区分出了如下的五个不同范畴：①严格的有限主义；②有限主义；③非直谓主义；④直谓主义；⑤柏拉图主义。而且，现今的普遍态度“已不是在这五个范畴之间进行选择，而是把它们都看成是对于同一巨大结构的有用报告。因为，只有这样，才能使我们建立起一个比那种仅仅借助于其中的某一个要充分得多的形象。”[1]显然，基础研究的这种统一也就从一个角度表明了现代数学传统日趋一致的走向。

其次，应当指明的是，除去“数学是模式的科学”这一观念外，作为关于“什么是数学”的问题的总的看

---

① HaoWang: “Eighty Years of Foundational Studies”, 《Dialectica》, 12 [1958].

法，也即总体性的数学观念，还包含有更多的内容，特别是，与这种较为自觉的认识相比，一些不那么明确的观念或信念在所说的总体性数学观念中也占有十分重要的地位。例如，以下即是现今的数学工作者所普遍持有的一些较为重要的观念和信念：

尽管现代数学存在多样化的发展趋势，数学家也明显地表现出了专门化的趋向，但是，数学家们仍然对数学的统一性有着强烈的信念，他们不仅清楚地意识到自己的工作只是整个数学的一个组成部分，而且普遍地认为数学各个部分之间的联系是十分重要的，甚至认为数学的生命力就在于其各个部分的内在联系（可参见第三章）；

尽管数学结论的正确性必须逻辑地予以证明，但是，直觉在数学定理的发现过程中也发挥了十分重要的作用，这就是说，逻辑与直觉构成了数学研究的双翼（可参见第九章）。

数学家们确信自己所从事的是一种有意义的活动，他们并由自己的研究工作获得了极大的乐趣，更普遍地感受到了数学的美，这种美感对其研究活动有着十分重要的影响（可参见以下的论述）。

〔将数学家的上述观（信）念与学生的数学观加以对照，容易看出，“学校的数学”确实在很大程度上不同于“真正的数学”。显然，这就可被看成现行数学教育的一个最大弊病。〕

2. 规范性成分，也即关于应当如何去从事数学研究的具体规范或准则。显然，“数学是模式的科学”这一认

识就直接决定了对于数学研究我们应当作出如下的具体规范：

首先，由于数学家们普遍地认为集合论为已有的数学提供了一个较为适当的基础，因此，在数学研究中我们就应采用集合论的语言。也正是在这样的意义上，亚历山大洛夫写道："集合论观点的统治地位也是现代数学特点。"①

由于数学传统主要地即是通过教学及专业训练得以建立和传播的，因此，从这样的观点去进行分析，集合论思想向中、小学的渗透就是一个必然的趋势。当然，我们在此又应处理好必要性和可接受性的关系。后者显然也就是"新数学运动"所给予我们的一个重要启示。

然而，应当明确的是，集合论又不应被看成数学的最终基础，而这也可被看成数学基础研究所给予我们的一个重要启示。更为一般地说，我们在此即应清楚地看到基础研究的历史局限性。这就正如F·克莱因(F·Klein)在本世纪初所已形象地指明了的："事实上，数学已经长得像棵大树，但它不是从最细的根部开始生长的，也不是只向上生长的，相反，在枝、叶扩展的同时，它的根向下扎得越来越深……那么，我们就能看出，数学中的基础是没有最终结局的……"②

其次，数学结论不应满足于经验的论据，而必须建立在理论性的论证之上。这也就如亚历山大洛夫所说：

---

① 亚历山大洛夫：《数学——它的内容、方法和意义》，第一卷，第3页，北京，科学出版社，1984。

② F·克莱因：《高观点下的初等数学》，第325页，武汉，湖北教育出版社，1989。

"不仅数学的概念是抽象的、思辨的，而且数学的方法也是抽象的、思辨的。"[①] 应当指出，现代数学并对数学证明的形式化程度提出了较高的要求，即其至少在理论上应是可以彻底地形式化的。

然而，应当明确的是，以上所说的主要地又只是一种理论上的要求，而在实际的数学活动中我们则不可能、也不需要追求彻底的形式化。事实上，任何稍有数学经验的人都知道，数学中大部分定理的证明都是"不完整的"，从而，对于定理的接受在一定程度上就仍然包含有"信念"的成分。例如，这就正如当代美国著名数学家麦克莱恩（S. Maclane）所指出的："很少有一个明确给出的绝对严密的证明，大多数用文字写下的数学证明只是些能足够详细地指出如何构成一个完全严密证明的概述。于是，这种概述用来传递某种信念，即确信结果是正确的，或一个严密的证明是能够构成的。"[②] 当然，这种信念并非盲目的轻信，特别是，由于一个数学结论能否为数学共同体所接受，要经过一定的审查程序，即如有关论稿在公开发表前的审查等，从而，这事实上就可说是数学共同体的一种共同信念，或者说，这即是更为具体地表明了共同体对于各个数学家的具体工作确实有着重要的规范作用。

显然，上述的分析也就表明在数学中绝对的严格性是不可能达到的，而这又不仅是因为在数学中并不存在

---

① 亚历山大洛夫：《数学——它的内容、方法和意义》，第一卷，第3页，北京，科学出版社，1984。

② 麦克莱恩："数学模型"，载邓东皋等编，《数学与文化》，第111页，北京，北京大学出版社，1990。

最终的基础，而且也是因为，作为数学共同体的共同信念，后者又必定具有一定的历史局限性。这就正如怀尔德所指出的："很明显，我们不会拥有而且极可能永远不会有任何一个这样的证明标准，其独立于时代，独立于所要证明的东西，并且独立于使用它的个人或某个思想学派。在这种情况下，明智的做法似乎就是承认，一般地讲来，数学中根本就没有绝对的真实证明这种东西。"[1]从而，在数学的历史发展中经常可以看到以下的现象也就十分自然了："随着数学的进化，隐藏的假设不断被发现并得到明确的表述，其结果或者是普遍的接受，或者是部分或全面地被抛弃；接受通常伴随着对假设的分析以及用新的证明方法去证实它。"（可参见附录一）当然，从总体上说，我们又应明确肯定，数学的发展总是伴随着严密性程度的不断提高，以及与此直接相关的对于相应结果更为深刻的理解。

最后，数学问题的重要性不仅取决于它的实践意义，而且也取决于它的数学意义。

一般地说，这事实上也就为具体判定数学研究（创造）的意义提供了必要的准则，特别是，我们即应明确肯定数学研究的相对自由性，这就是说，除在社会实践中的成功应用这一"经验的标准"外，数学研究有着自己相对独立的特殊标准，这就是关于研究工作数学意义的分析——对此可特称为"数学的标准"。

也正是基于这样的认识，我们在此即可引进如下两

---

① 克莱因：《数学：确定性的丧失》，第323页，长沙，湖南科学技术出版社，1997。

种不同的真理性概念：

第一，现实真理性。这即是指数学理论是对于现实世界量性规律性的正确反映。

第二，模式真理性。这是指数学理论决定了一个确定的数学结构（模式），而所说的理论就其直接形式而言就可被看成关于这一数学结构的真理。

显然，所说的“现实真理性”就取决于理论在社会实践中能否得到成功的应用；与此相对照，“模式真理性”则可被看成上述“数学的标准”的直接反映：如果一个数学工作具有一定的数学意义，即如相应的数学结构有着丰富的数学内涵，或如新的研究工作有着一定的方法论意义，包括有利于方法的改进、概念的澄清、不同理论的统一等，我们就可认为相应的数学理论是可以接受的，也即决定了一个确定的数学结构。

显然，“模式真理性”概念的明确引进即是对实际数学工作者真实态度的如实反映。例如，就数学抽象的合理性而言，许多数学家曾提出过“富有成果性”和“富有启示性”的标准，而这显然是与上述“数学的标准”完全一致的。另外，相对于“经验的标准”而言，“数学的标准”则就清楚地表明了数学的特殊性，这也就是指，我们不仅应当明确肯定数学的经验性，而且也应明确肯定数学的“拟经验性”。

最后，就现实真理性与模式真理性的相互关系而言，我们又应明确肯定：由于数学研究的最终目的在于认识和改造世界，因此，与模式真理性相比，现实真理性就是更为重要的，这也就是说，就整体、过程、总和、趋

势、泉源来说，数学即是思维对于客观世界量性规律性的正确反映。

事实上，我们在此就应清楚地指明数学现代研究中所存在的一种危险倾向，即只是惟一地强调了数学的研究，而完全切断了数学与现实世界（以及与自然科学）的联系。

具体地说，如果说模式的建构与研究即是为数学的自由创造提供了现实的可能性，那么，非欧几何与四元数等理论在数学中地位的确立则就实际地导致了数学研究对象的极大扩展，也即是由具有明确直观背景的量化模式扩展到了可能的模式；特别是，在一些数学家看来，既然像非欧几何那样的纯粹的人为发明后来也可能被证明十分有用，那么，数学家就完全不用去顾及自己的理论是否具有任何的现实意义，而只需惟一地集中于所谓的“纯数学”研究。正如克莱因所指出的，后一种倾向事实上就是把数学变成了一门完全封闭的学科：“数学现在几乎成了一个自我封闭的体系。它根据自己评判现实意义和完美性的标准来决定自己的前进方向，它甚至满足于自己与外界的问题、动力、灵感相隔绝的状况。”[①] 克莱因曾指出，我们在抽象化、一般化、专门化、公理化等方面都可以清楚地看到这样的迹象，即如只是致力于如何用更为抽象的词汇或新的概念去对先前业已存在的、用具体明确的语言表述的理论重新进行表述，或是如何对已有的公理系统进行细枝末节的修改，而其目的

① 克莱因：《数学：确定性的丧失》，第312页，长沙，湖南科学技术出版社，1997。

则是为了使公理的表述变得更为简洁，或是使原先的三条公理可以合成两条，或是“自由地”去进行公理的创造与组合，以及由于过分的专门化所导致的研究问题的极端狭窄，以致没有几个人能弄懂。

事实上，一些著名数学家早就对这种“纯数学”研究的危险性提出了警告。如克莱因就曾指出：“在现代思维的急速发展中，我们禁不住要担心，我们的科学面临着越来越独立的危险。”“当今数学科学中最大的需要是纯数学和自然科学的各个分支应当再一次建立起紧密的联系。”彭加莱（H. Poincare）也曾这样写道：“忘记外部世界之存在的纯数学家将会像一个知道如何和谐地调配色彩和构图，却没有模特的画家一样，他的创造力很快就会枯竭。”[①] 另外，与上述的言论相比，冯·诺意曼（Von Neumann）的以下著名论述则可说是更为清楚地指明了纯数学的研究所可能导致的严重后果：“当一门数学学科远离它的经验本源继续发展的时候，或者更进一步，如果它是第二代和第三代，仅仅间接地受到来自‘现实’的思想所启发，它就会遭到严重危险的困扰。它变得越来越纯粹地美学化，越来越纯粹地‘为艺术而艺术’。如果在这个领域周围是互相联系并且仍然与实践经验有密切关系的学科，或者这个学科处于具有非常卓越和发展健全的审美能力的人们的影响之下，那这种美学需要不一定是坏事。但是，仍然存在一种严重的危险，即这门学科将沿着阻力最小的途径发展，使远离水源的小溪又

---

① 克莱因：《数学：确定性的丧失》，第 294～295 页，长沙，湖南科学技术出版社，1997。

分散成许多无足轻重的支流，使这个学科变成大量被搞混乱的琐碎支节和错综复杂的末事。换句话说，在距离经验本源很远很远的地方，或者在多次‘抽象的’近亲繁殖之后，一门数学学科就有退化的危险……每当到了这种地步时……惟一药方就是为重获青春而返本求源：重新注入多少直接来自经验的思想。我相信，这是使题材保持清新与活力的必要条件，即使在将来，这也是同样正确的。”①

综上可见，在承认相对独立的“模式真理性”的同时，我们又应明确肯定“现实真理性”的主导地位。这也就是所谓的“数学真理的层次理论”。②

3. 启发性成分。

首先，正如前面所已提及的，波利亚的数学启发法即应被看成现代数学传统中一个重要的启发性成分。

然而，值得指出，在很多情况下，人们又往往只是重视了数学的知识成分而忽视了对于数学启发法的自觉学习和继承。例如，美国著名数学家、数学教育家舍费尔德（A. Schoenfeld）就曾具体地谈到过以下的亲身经历：他是在实际从事数学研究工作数年后才开始接触到波利亚关于数学启发法的各部论著，开始时这曾给他带来了很大的喜悦，因为舍费尔德发现，波利亚的数学启发法与他自己通过实践所作出的一些总结是相当一致的——由于波利亚是公认的大数学家，因此，在舍费尔德

---

① 冯·诺意曼：“数学家”，载《数学史译文集》，第123页，上海，上海科学技术出版社，1997。
② 徐利治、郑毓信：《数学模式论》，第三章，南宁，广西教育出版社，1993。

看来，这种一致性也就在一定程度上证明了他自己具有作为一个好的数学家所应具备的一些基本素质；但是，在这种最初的喜悦情绪消失了以后，舍费尔德很快又产生了一种懊悔、甚至可以说是气愤的情绪：为什么在整个数学学习过程中始终没有人给过他这方面的知识？不然的话，他就不用化这么大的力量去从头捉摸了。

另外，在充分肯定波利亚数学启发法的重要性的同时，我们又应当指出，我们既应努力学习波利亚的数学启发法，但又不能始终停留于波利亚的工作，而应更加注意这方面的最新工作。

事实上，正如人们所熟知的，波利亚在数学启发法（或者更为一般地说，“问题解决”）方面的工作主要地是在60年代以前完成的。由于从60年代起至今已有三四十个年头过去了，因此，我们在此显然就应考虑这样的问题：什么是自波利亚以来在这一领域中所取得的新进展呢？或者说，自波利亚以来在这一领域中是否并无任何重要的进步、以至在今天我们仍必须“言之必称波利亚”呢？

显然，科学的发展不会停滞在任一特定的水平上，而这事实上也就是我们在这一问题上所应采取的一个基本立场，即既应高度重视对于波利亚数学启发法的学习和继承，同时又应当特别注意对于波利亚的“超越”。

具体地说，我们在此一方面应当十分重视中国的数学方法论研究；另一方面又应当清楚地看到国外在“问题解决”的理论研究方面所取得的最新进展。[①] 显然，这

① 参见郑毓信：《数学方法论》，南宁，广西教育出版社，1993；《问题解决与数学教育》，南京，江苏教育出版社，1994。

事实上也就为数学传统的启发性成分提供了更为丰富的内容。

其次，就研究方向的选择而言，我们则又可以对前面所提及的由米山国藏提出的“数学的精神”作出如下的分析与补充：

第一，对所说的“数学的精神”事实上可以区分出两个不同的层次。具体地说，所谓的“致力于发明发现的精神”，也即“不断创新的精神”，显然是一种普遍的“科学精神”，即其不仅适用于数学，而且也适用于一般自然科学，从而就具有较高的层次；与此相比，“一般化”、“系统化”、“严密化”、“统一化”、“经济化”和“应用化”等则应说是属于另一不同的层次，而其共同特征就在于它们都具有较为直接的启示意义，即是表明了什么样的研究方向可能具有较大的意义。

第二，上述的一般性“科学精神”对于数学研究当然也具有十分重要的导向作用，但这种作用却并非十分具体的，毋宁说，这即是一种真正意义上的“精神”：它渗透于、体现于全部的数学活动之中。

也正是从这样的角度去进行分析，笔者以为，我们在此就不仅可以对所说的“创新精神”作出更为深入的分析：这在一定程度上即以“批判的精神”、也即合理的怀疑精神（包括自我反思与批判），与思想的开放性作为必要的前提；而且也可对“科学精神”的内涵作出更为全面的分析和论述。例如，除“创新精神”外，“实事求是”（或者说，“无偏见性和诚实性”）显然也应被看成“科学精神”的一个重要内涵。再例如，如果从更为广泛

的角度去进行分析，也即把科学伦理的问题也考虑在内。我们在此则又应当明确提出“科学的公有性”和“科学活动的无私利性”等这样一些科学家所应当具备的基本道德素养。

第三，就研究方向的选择而言，除去上述的“一般化精神”等，我们也应对这一层次上的“数学精神”作出必要的补充，此外，我们还应对它们的相互关系作出深入的分析，而这对于研究方向的选择也有着重要的启示意义。例如，应当特别强调的是，与“统一化”相对照，“多样化”无疑也应被看成现代数学研究的一个重要的指导性原则；另外，与此直接相关的还有“特殊化”，而后者则又显然是与“一般化”的精神相辅相成的（对此我们将在下一章中作出进一步的论述）。

第四，应当再次强调的是，以上所说的“一般化”、“特殊化”、“系统化”、“严密化”、“统一化”、“多样化”等，主要地都是从数学的内部进行分析的；而如果考虑到数学的经验本源，米山国藏所说的“应用化”的精神显然是更为重要的，或者说，我们在此即应十分注意这两个方面的适当平衡。这也就如著名数学家柯朗（R. Courant）所指出的：“当然，数学思维是通过抽象概念来运作的，数学思想需要抽象概念的逐步精炼、明确和公理化。在结构洞察力达到一个新高度时，重要的简化工作也变得可能了……然而，科学赖以生存的血液源于其根基又与所谓的现实有着千丝万缕的联系……只有这些力量之间相互作用以及它们的综合才能保证数学的活力。”另外，克莱因则明确地接受了塔里朗德关于“理想

主义者”和“现实主义者”的比喻，即是认为“理想主义者无法持久，除非他是一个现实主义者，而现实主义者也无法持久，除非他是一个理想主义者。”克莱因并进一步写道：“把这句话用于数学，就是要把实际问题理想化，进行抽象研究，同时理想主义者的工作如果脱离现实是不会长久的。数学家既要脚踏实地，又要高瞻远瞩。在抽象概念与具体问题的相互作用中才会产生出有生命的、重要的数学。”①

第五，就“数学精神”的学习和继承而言，笔者以为，我们在此又可看到一种十分有趣的文化现象，即这往往并非纯粹的理性行为，也包含有强烈的感情因素，特别是，所说的数学精神常常就表现为对于（数学）美的欣赏与追求。

具体地说，数学家们在自己的工作中切实地感受到了数学的美，这就正如彭加莱所指出的，“一个名符其实的科学家，尤其是数学家，他在他的工作中体验到和艺术家一样的印象，他的乐趣和艺术家的乐趣具有相同的性质”，而且，数学家们往往就以对美的追求作为自己的工作目标。例如，冯·诺意曼就曾这样写道：“我认为数学家无论是选择题材还是判断成功的标准，主要地都是美学的”；又“数学家成功与否和他的努力是否值得的主观标准，是非常自足的、美学的，不受（或近乎不受）经验的影响。”② 法国著名数学家阿达玛（J. Hadamard）

---

① 克莱因：《数学：确定性的丧失》，第306、314页，长沙，湖南科学技术出版社，1997。

② 冯·诺意曼：“数学家”，载《数学史译文集》，第121、122页，上海，上海科学技术出版社，1997。

也曾明确指出："究竟是什么制约着这样重要而困难的选择呢？……我们所必须遵循的准则就是科学的审美感……除了美感以外，就看不出任何东西能够帮助我们去作预见了。"[1]

对数学家关于数学美的言论进行具体分析，可以看出，数学家们关于数学美的感受的确带有强烈的感情色彩。例如，就只有从这样的角度去进行分析，我们才能很好地理解罗素和王浩等人何以把数学美分别称为"冷而严肃的美"和"干涩美（dry-beauty）"；另外，尽管不同的个体对于数学的美可能有着不同的感受，但是，从整体上说，数学美又不是什么虚无飘渺、忽有忽无的东西，也不是某种纯粹主观、不可捉摸的东西，而是有着较为确定的客观内容，特别是，从历史的角度看，"对称美"、"简单美"、"统一美"、"奇异美"就可被看成是数学美的主要内容。[2]

由此可见，所说的数学美事实上就是与以上所说的数学精神直接相联系的，或者说，数学中的"美学标准"在很大程度上就从属于"数学的标准"。这也就如波莱尔所指出的："我相信，我们的美学并不总是那么纯净而奥秘，也包含几条较为世俗的检验标准，例如意义、后果、适用、用途——不过是在数学的范围内。"[3]

显然，从这样的角度去分析，我们也就可以更好地理解对于美的追求何以可能在数学的发展中发挥如此重

---

① 阿达玛：《数学领域中的发明心理学》，第97页，南京，江苏教育出版社，1989。

② 郑毓信：《数学方法论入门》，第三章，杭州，浙江教育出版社，1985

③ 波莱尔："数学——艺术与科学"，载邓东皋等编，《数学与文化》，第154页，北京，北京大学出版社，1990。

要的作用，因为，前者在很大程度上就以数学上的考虑作为直接的背景；另外，就数学美本身而言，这又清楚地表明了后者主要地并非“感性美”而是一种“理性美”，这也就是说，数学家们对于数学美的追求与感受是与其事业上的追求和成功的喜悦密切相联系的。

从而，从文化的角度去进行分析，我们也就可以看出，文化传统（在此即是指数学传统）的继承可以表现为多种不同的形式，特别是，一些规范性很强的成分未必表现为硬性的规定，也可能转化为某种“自觉的”追求，人们并可由此而在心理上获得极大的满足，以至产生强烈的美感。显然，这也就更为清楚地表明了文化传统对于个人行为的重要影响。特别是，“时尚为美”，而所说的审美情趣则又是可以后天地予以培养的。这就正如戴维斯（P. Davis）和赫斯（R. Hersh），在其所著的《数学经验》一书中所指出的：“数学中的审美判断是可以培养的，可以由上一代人传递给下一代人，由教师传递给学生，由作者传递给读者。”[①]

再者，以下的认识尽管所涉及的只是数学研究的具体形式，但其对于实际的数学活动也有着重要的启示意义。

具体地说，这即是近年来在数学界所出现的一个新迹象，即合作的重要性已逐渐为数学家们所普遍接受，而这又不仅是指各个数学家必须与其他数学家、特别是相应共同体的其他成员保持密切的联系，以期获得有益

① 戴维斯、赫斯：《数学经验》，第169页，南京，江苏教育出版社，1991。

的启示，包括对于自己研究工作的必要评价或批评等，而且也是指在研究工作中的真正合作，包括同一领域中和不同领域中数学家之间的合作。

例如，在由英国学者伯顿女士（L. Burton）所主持的一项较为广泛的调查中，被调查的70名数学家中仅有4人声称自己是独立地从事研究工作的，余者则表明自己的研究多多少少地都依赖于与其他数学家的合作。由于独立的研究在很长时期内一直是数学研究活动的主要形式，因此，在很多人看来，这就代表了一个重要的变化——一些数学家更明确地把它称为“文化的转变”——即是由“个人主义的统治”转向了对于合作的高度评价，后者并逐渐占据了主导的地位。例如，在伯顿所从事的调查中，一位数学教授就曾这样谈及：“在数学研究中过去存在这样一种不好的风气，即一个好的数学家应当努力表明自己是最优秀的……我认为人们现今已经普遍认识到了合作的重要性。”

一些被调查者并曾较为具体地谈到了合作研究的优越性：

“我当然具有一定的长处和短处，与其他人合作可以使这些长处进一步加强，短处则可得到补救。”

“我具有直觉，而他进行证明。”

“如果与其他人合作，就可减少你的孤独感……通过与其他人合作，你会发现自己所适于从事的一些工作，在这些方面你可能比别人作得更好，你也会发现有些工作适于别人而不适合自己。你可以利用他们的知识而无须经受万事都必须由自己来照料的痛苦，就像找到了一

个可以自动进行选择的图书馆。”

“这是一件十分愉快的事，一个非常能动的过程，随着工作的开展你会认识到自己拥有其他人所不具有的才能，等等。当你与具有共同语言的数学家进行合作时，这是一种交流……我十分欣赏这种经验。与其他领域中的数学家进行合作也是很有启示的，尽管这时我们不再具有共同的语言，但由一种语言到另一种语言的翻译正是一个能量扩散的过程。”

“通过合作我们取得了更快的进展，因为我的一些不合适的思想可以更快地得到解决，在我们之间并产生了更多的新想法。”

“合作使得产生新思想的机遇大大地增加了。”

“最终的结果大于各个部分的和，因为任何一个方面都不能单独地完成这一工作。”

上述的言论清楚地表明了合作的优越性。然而，值得指出的是，除去各个个体必然具有一定的局限性而合作则可起到互补的作用这一事实外，我们也还可以从对象（客体）这一角度指明合作的必要性，这即是指，对于合作形式的确认也可被看成数学现代发展的一个必然结果。因为，由于数学的迅速发展，对于个别的数学家来说，在今天要想能通晓数学的各个分支即使不说不可能、至少也是十分困难的，从而为了更有效地进行工作，就必须建立必要的合作关系。

（显然，以上的分析同时也就为我们改善数学教育指明了一个努力的方向，即从学校起，我们就应大力提倡同学之间的合作。）

4. 最后，应当指明，现代数学传统的一致性不应被看成一种绝对的同一性。

首先，以往的传统作为一种文化沉淀必然会留下一定的痕迹，也即必然地会对现今的活动产生或多或少的影响。例如，这或许就可被看成出现下述现象的一个直接原因，即有些数学仍然具有明显的民族特征。这也就如怀尔德（R. Wilder）所指出的："法国数学偏爱函数论，英国数学对应用感兴趣，德国着重于数学基础，意大利感兴趣于几何，而美国的数学则以其抽象特征著称。"[1]

其次，如果从更为精细的角度去进行分析，我们在此当然又应看到由于专业分工在数学家之间所造成的重要区别。例如，在此我们即应特别提及纯粹数学家与应用数学家的对立。这就正如哈尔莫斯（P. Halmos）所指出的："实行者和认识者常常在动机、态度、方法以及满意的标准方面各不相同。这些差别可以在应用数学（实行者）与纯粹数学（认识者）这一特例中看到。应用数学的动机是认识世界并且也许还要改造世界，所需的态度（或者，无论如何，可以说是一种惯例的态度）是一种准聚焦的（把你的眼睛盯住问题）；方法是按它们的实效来选择和加以评价（所得的结果是重要的）；满意则来自问题的解答经过了实际的检验而且可以用来进行预测。纯粹数学的动机常常只是好奇心；其态度则更像是一只广角镜头而不是望远镜头（看看附近是否有更有趣更深

[1] J. Kapur：《数学家谈数学本质》，第30页，北京，北京大学出版社，1973

刻的问题），方法的选择至少部分地决定于适合承上启下的谐和性（做到了这一点就有了事成一半般的快感）；满意则来自解答阐明了原先似乎相距甚远的概念之间的意想不到的联系。”又“在动机、态度、方法、满意的标准方面基本的差别可能与在表达方式方面的差别有联系，那是一种更加表面但更加显著的差别。纯粹数学与应用数学关于清晰、优美，以及或许甚至逻辑的严密有着各自不同的惯例，而这些差异常常使得相互的交流极不愉快。”“许多纯粹数学家把他们的专业看做是一种艺术，在他们的语言中，对别人的工作最高的赞扬是‘漂亮’。应用数学家有时似乎把他们的学科看做是方法的一种系统化，用来赞扬一个工作合适的说法是‘巧妙’或‘强有力’。”① 由此可见，在所说的意义上，纯粹数学家与应用数学家就可被看成组成了两个不同的数学共同体。

最后，随着数学自身与整个人类文化的发展与进步，数学传统也必然地有一个发展和演变的过程。例如，新的物质－技术条件的出现就可能造成新的研究方法，而对于新方法的不同态度则就可能导致相对统一的数学传统的分化。

具体地说，计算机技术的迅速发展和普及就正在造成一种新的研究数学的方法——实验方法，而这显然是与传统的研究方法很不相同的：“传统数学家设想证明，实验数学家设计实验；传统数学家冥思苦想，实验数学

① 哈尔莫斯：“应用数学是坏数学”，载邓东皋等编，《数学与文化》，第163－164页，北京，北京大学出版社，1990。

家把图像显示在计算机屏幕上；传统数学家用手进行繁复的计算，实验数学家把例行的计算交给计算机去快速地完成……”[1] 由此可见，计算机技术的迅速发展很可能造成一种新的数学——“新潮数学”，而这当然也会促使数学观发生革命性的变化。

事实上，除去这种较为激进的观点外，我们还可从较为一般的意义上去分析计算机对于数学发展的重要影响（可参见第三章）。例如，计算机的使用直接导致了数学中一些新的研究分支，包括使一些传统的研究问题和概念得以复活，并使得某些理论或研究方向变得特别重要；另外，计算机显然也为数学研究提供了新的工具，特别是，数学定理的机器证明正在取得迅速的发展。从而，从整体上说，计算机的使用就正在改变整个数学的面貌，而这当然又会促使人们对数学（包括数学证明等）的本质作出更为深入的思考，这样，数学传统的进一步发展和演变也就不可避免了。例如，一些数学家提出，中国古代的“问题－算法”传统，“由于计算机的出现，已越来越为数学家所认识与重视，势将重新登上历史舞台。”[2] 显然，这事实上也就可以看成现代数学传统发生深刻变化的直接先声。

从而，总的来说，现代数学传统的高度一致性就是一种包含有一定差异的一致性，而且又必将随着整个人类文明的进步发生新的演变或分化。

---

① 胡作玄：“计算机对于数学的影响”，载《科学、技术与辩证法》，1992年，第六期。

② 吴文俊：“关于研究数学的中国的历史与现状”，载《自然辩证法通讯》，1990年，第四期。

第三章 数学文化：一个开放的系统

从历史的角度看，数学最初只是作为整个人类文化的一个部分得到了发展；然而，随着数学本身与整个人类文明的进步，数学又逐渐表现出了相对的独立性，尤其是获得了特殊的发展动力并表现出了特有的发展规律。正是基于这样的考虑，一些学者认为，数学文化的发展已经达到了一个较高的水平，并可被认为构成了一个相对独立的文化系统（或者说，文化子系统）。以下我们就以美国学者怀尔德在这方面的工作[①] 为基础对数学发展的动力和规律等问题作出分析和论述。应当指明，相对于前两章而言，这一章的研究可以说达到了更高的层次，因为我们在此已超越各个个别的数学家而以数学自身作为直接的研究对象。

① R. Wilder: 《Evolution of Mathematical Concepts, An Elementary Study》, John Wiley & Sons, Inc., 1968; 《Mathematics as a Cultural System》, Pergamon Press, 1981.

3.1 数学发展的内在动力与规律

上面已经提到，本章研究的重要特点即是超越各个个别数学家的具体工作而从更高的层次上去论及数学的发展动力和规律。这也就是说，我们在此是以数学自身，而不再是以各个数学家的具体工作作为直接的研究对象。这种研究是否有其一定的合理性呢？为了回答这一问题，我们可以首先考察数学史上经常看到的一个现象，即重大问题的发现或解决往往是由多个不同数学家彼此独立、然而又几乎是同时作出的，这就是所谓的"多重发现"。

例如，牛顿和莱布尼兹对于微积分理论的创立，高斯、罗巴切夫斯基和鲍耶对于非欧几何的创造，纳皮尔与彪奇对于对数计算法的创立等，都可看成"多重发现"的典型例子。更为一般地说，这就正如鲍耶的父亲老鲍耶（他也是一个数学家）所指出的："那似乎是对的，很多事物仿佛都有那么一个时期，届时它们就在很多地方同时被人们发现了，正如在春天看到紫罗兰处处开放一样。"[1]

显然，就我们目前的论题来说，这就从一个方面清楚地表明了这样一个事实：即数学发展有其一定的规律性，而各个个别的数学家的具体工作在很大程度上就是由这种客观规律所决定的，或者说，个别数学家在此所起的在很大程度上只是一种"催化剂"或"执行者"的作用。从而，为了使研究工作不断深化，我们就可以、而且应当超越各个个体去研究数学自身发展的规律。

[1] 克莱因：《古今数学思想》，第三册，第275页，上海，上海科学技术出版社，1979。

为了清楚地说明问题，在此还可对哲学上的一个相关理论，即著名哲学家波普尔（K. Popper）所提出的三个世界的理论，作一简单的介绍。

所谓“三个世界”的理论，笼统地说，即是指我们可以区分出如下的三个不同的“世界”：①物理客体或物理状态的世界，亦可称为世界1；②意识状态或精神状态的世界，亦可称为世界2；③思想的客观内容的世界，亦可称为世界3。

从历史的角度看，在波普尔之前，弗雷格即已明确地提出了三种不同的存在的思想（它们构成了所谓的“三个领域”），这就是：①外部世界中的物质对象；②从属于各个个体的观念［弗雷格称之为“观念”（idea）］；③客观的抽象对象［他称之为“思想”（thought）］。弗雷格指出：思想既非外部世界中的事物，也非观念。因为，第一，思想具有观念所不具有的客观性。对此弗雷格写道：“思想并不需要一个拥有者以从属于他的思维内容。例如，我们用毕达哥拉斯定理表达的思想永远是真的，而不管任何人是否认为它为真。它并不需要一个拥有者，它并不是从得到发现的那个时候起才是真的。正如一颗行星在被任何人看到以前就处于与其他行星的相互作用之中。”第二，思想并不具有物质对象所具有的现实性。对此，弗雷格写道：“我们应把客观的和现实的这两者明确地区分开来。”[①] 此外，弗雷格并突出强调了第三种存在对于其他两种存在的作用和影响。事实上，弗雷格关

---

① D. Gillies:《Frege, Dedekind, and Peano on the Foundations of Arithmetic》, Van Gorcum, Assen, The Netherlands, 1982, P. 40.

于思想的客观实在性的论述在很大程度上即是就思想对于其他两个领域的影响而言的。例如，弗雷格写道："如果说思想具有一种实在性，也只能在以下的意义上去说：人们所具有的知识，例如自然科学知识能影响他的判断并进而影响着物质的运动。"[1]

由此可见，波普尔关于三个世界的区分在很大程度上即是对于弗雷格三个领域的思想的直接继承；但是，与弗雷格相比，波普尔更为明确地强调了世界3对于世界2的依赖性。例如，波普尔写道："柏拉图的第三世界是神圣的，它是不变的，并且当然是真的。因而在他的第三世界和我的第三世界之间便存在一条鸿沟：我的第三世界是人造的和可变的，它不仅包括真实的理论，而且包括虚假的理论，尤其还包含尚未解决的问题、推测和反驳。"[2] 另外，波普尔的三个世界理论的核心则在于他突出强调了世界3的相对独立性和自主性。波普尔写道："自主性观念是我的第三世界理论的核心：尽管第三世界是人类的产物，人类的创造物，但是它也像其他运动的产物一样，反过来又创造它自己的自主性领域。"[3]

显然，按照波普尔的上述理论，数学对象就属于他所说的世界3，因为，正如第一章中所已清楚地指明了的，数学对象并非物质世界中的真实存在，而是思维活动的直接产物；然而，又由于数学对象是借助于明确的定义得到建构的，因此，即使相对于其创造者而言，一

---

① M. Dummett：《The Interpretation of Frege's Philosophy》，Harvard University Press，1981，P. 391.
② 波普尔：《客观知识》，第131页，上海，上海译文出版社，1987。
③ 同②。

旦数学对象获得了明确的定义，它们就立即获得了一定的相对独立性，另外，由个体向共同体的过渡（这即是指，如果个体的数学创造能够成功地为相应的共同体所接受）则更为直接促成了数学对象由“主观的思维创造”向“（相对）独立的客观对象”的转变。进而，我们在此所说的数学发展的规律则又显然就可被看成世界3的“自主性”的集中表现。

正因为我们可以脱离各个个体而去论及数学发展的规律，因此，在怀尔德看来，我们也就可以把数学比拟成一个按照自身规律不断发展进化的“超有机体”，而且就像生物的进化论研究一样，我们在此也可用同样的方法去对促进数学发展的各种动力因素作出具体的分析。怀尔德写道：“即如我在《数学概念的进化》一书中所强调指出的，数学有一个进化的过程，而且，与生物的进化一样，数学的进化也受到各种力量的作用。”[①]

具体地说，怀尔德在自己所著的《数学概念的进化》一书中曾明确地列举出了数学发展的11种动力（附录一），而如果着眼于内部的话（怀尔德把这种内在的动力称为“遗传力量”，这显然是由进化论中所直接借用的一个词汇），这主要包括：符号化，抽象，一般化，一体化，多样化。

1. 怀尔德指出，对于新的、更合适的符号的不断追求是整个数学史的一个重要特征，而合适的符号系统的建立则就为数学的进一步发展创造了一个具有遗传特性

① R. Wilder: 《Mathematics as a Cultural System》, Pergamon Press, 1981, P. 18.

的力量。除去操作上的便利以外，合适的符号还可促进数学的抽象创造，因为符号的使用已直接揭示了更为一般的形式，并为概念的扩张提供了现实的可能性。

2. 怀尔德认为，文化发展的一个普遍规律，就是随着自身的发展，各个文化系统必然会达到更高的抽象程度，而后者则又意味着获得了更大的遗传力量。例如，拓扑学最初是作为几何学的一个分支得到发展的，然而由于采取了抽象的一般形式，拓扑学的意义很快就超出了原先的范围并渗透到了数学的各个分支。怀尔德又认为，数学中很多伟大的抽象并不是以渐进的形式、而是以飞跃的形式得以实现的，这一现象并是由数学的内在力量所决定的。例如，由集中寻找五次及五次以上方程的公式解转到思考这种公式解是否存在便是一次重要的飞跃，而又正是在前一方向上的长期失败直接促使人们去进行新的思考，并最终达到了新的、更高的抽象程度。

3. 怀尔德指出，一般化是数学家从事研究工作最为重要的方法之一。一般化与更高层次的抽象有着密切的联系，一般化正是达到更高抽象的一个重要手段。例如，一些原来彼此独立地发展起来的理论后来可能被发现具有相同的数学特性，这时就可通过一般化建立一个新的理论，并使原来的各个理论成为新理论的特例，而这显然就达到了一个新的、更高的抽象程度。例如，群论的建立就是这方面的一个典型例子。

4. 所谓“一体化”，在此是指一些原来互不相关的理论（或概念、方法）通过相互渗透形成了一个具有更大潜在能力的新的理论，而原先的两个理论则仍然保持着

独立的存在性。怀尔德指出，数学中的一体化其直接的动力往往是为了从外部吸取方法以解决原先领域中久久未能得到解决的问题，而其最为重要的后果之一则是极大地增强了数学的统一性。

5. 怀尔德所谓的“多样化”，是指由一个理论或概念引出多种不同的新理论或新概念，它们分别体现了原有理论或概念的不同特征。例如，自然数既是一种基数，又是一种序数，而在超穷数理论中则对这两者作了明确的区分，从而，这事实上就是一种多样化的发展。与一体化相类似，怀尔德认为，多样化常常也是由数学发展的现实状况所决定的。另外，在这两者之间还存在着重要的联系，一体化正是多样化的必然发展。

容易看出，怀尔德所说的上述各个“动力”与第二章中所说的“数学的精神”是十分接近的。从而，我们也就可以以后者为依据对数学发展的动力因素作出必要的补充，特别是，由数学发展史的具体考察我们即可知道，严格化和系统化也应被看成促进数学发展的重要动力因素。另外，如果采用第二章的表述方法，这里所说的各个动力因素显然也就可以被看成“数学传统”的重要组成成分。

应当指出，除去明确地列举出了数学发展的一些动力因素，怀尔德还突出地强调了在数学传统与数学知识的现实状态这两者之间所存在的重要联系。这即是指，数学家们并不是盲目地去从事一般化、严格化、系统化等方面的研究工作的；恰恰相反，这种研究在很大程度上正是由数学发展的现状所决定的，或者说，正是数学

发展的现实状况为所说的研究提供了必要的基础和实际的动力。例如，矛盾（悖论）的发现将促使数学家积极地去从事严格化的研究，理论的多样化将直接导致一体化的工作，不适合的符号的存在将促使数学家去创造新的更为合适的符号，理论在数量上的积累又必然会引起系统化的任务，等等。另外，数学家们之所以不满足于已有的工作，并总是希望通过新的研究去发展和深化认识，即如达到新的更大的普遍性、更大的严格性、新的更高层次上的和谐性等，则又主要是由于传统的力量，也即是对于所说的“数学的精神”的直接继承。

从而，如果从内部进行分析，以下就可被看成数学发展的一条最为重要的规律，即正是“数学传统”与“数学发展现实状况”（包括已取得的成功及种种不如人意的地方，即如长期未得到解决的问题的存在、不相容性的发现、现有符号的不适合性等）的辩证关系在很大程度上决定了数学的进一步发展，或者说，这两者的辩证关系即是决定数学发展的主要矛盾之一。

显然，从这样的立场出发，我们也就可以联系以上所列举的各个“动力因素”揭示出关于数学发展的一些更为具体的规律。特殊地，后者事实上就构成了怀尔德所谓的“数学发展的23条规律”（附录一）的一个重要组成部分。即如：

规律5 一个概念或理论能否保持它的重要性，既取决于它的富有成果性，又取决于它的符号表达形式。如果后者造成了理解上的困难而概念却仍然是富有成果的，那么，一种更容易把握和理解的符号形式就会得到发展。

规律 7　如果若干概念的一体化将会促进一个数学理论的发展，特别是这一理论的发展就依赖于所说的一体化，那么，这种一体化就会发生。

规律 13　数学现行概念结构中不相容性或不适当性的发现，将会导致补救性概念的产生。

规律 15　数学的不断进化伴随着严密程度的提高。每一代数学家都会感到对先前几代人所作的隐藏的假设进行证明（或反驳）是必要的。

规律 21　随着数学的进化，隐藏的假设不断被发现并得到明确的表述，其结果或者是普遍的接受，或者是部分或全面地被抛弃；接受通常伴随着对假设的分析以及用新的证明方法去证实它。

规律 16　数学系统的进化只能通过更高的抽象进行，这种抽象借助于一般化和一体化，并通常为遗传的力量所激励。

另外，由于概念的创造和问题解决显然构成了数学发展的基本形式，因此，从以上的基本立场去进行分析，以下各条规律的提出也就十分自然了：

规律 6　如果一个理论的进展依赖于某一问题的解决，那么，这一理论的概念结构就会以这样的方式得到发展以使这一问题得到最终的解决。一般说来，这种解决将带来一大批新的成果。

规律 8　如果数学的发展需要引入某种似乎是不合理或“不真实”的概念，那么，这种概念就会通过适当的且可接受的解释提供出来。

最后，应当明确的是，与怀尔德所指出的上述各条

数学发展规律相对照，笔者以为，我们应当进一步揭示数学发展的辩证性质，从而更深刻地指明数学发展的内在规律。

具体地说，除去上面所已提及在数学知识的现实状况与数学传统之间所存在的辩证关系外，我们并可清楚地看到在数学的历史发展中所存在的以下各个辩证关系：

1. 抽象化与具体化

由于数学的发展在很大程度上只能借助更高层次上的抽象得以实现，因此，不断地上升到新的、更高的抽象程度就是数学发展的一个重要特征；但是，作为问题的另一方面，我们又不能认为抽象化是数学发展的惟一形式。事实上，在达到更高的抽象程度的同时，在数学中也存在着具体化的倾向。例如，计算数学、运筹学、统计数学、模糊数学等与实践密切相关的学科的建立与发展就是具体化的实际例子。另外，更为重要的是，数学向着更高抽象程度的发展又并非是一个单向的简单过程，而是在抽象与具体的辩证运动中得以实现的。

对于数学中抽象化与具体化的辩证关系可以具体论述如下：

第一，与抽象的数学研究相对照，理论在实际中的成功运用显然可被视为“具体化”的一个基本涵义。也正是在这样的意义上，我们即可清楚地看出存在于“抽象化”与“具体化”之间的互相依赖、相互促进的辩证关系：一方面，只有依赖于抽象的数学研究，我们才能更为深刻地认识客观世界，从而也才可能在应用上取得更大的成功。这就正如怀特海所指出的：“当数学越是退

到抽象思想的更加极端区域，它就越是在分析具体事实方面相应地获得脚踏实地的重要成长。"① 另一方面，又正是实践活动哺育了抽象的数学研究并为之提供了必要的调节因素，因为，不然的话，如果我们只是由概念去引出概念，在抽象之上进行抽象，最终则就可能因为完全脱离实际而走向荒谬。例如，这就正是悖论的发现所给予我们的重要启示。

第二，无论是"具体"或"抽象"，在数学中又都只具有相对的意义。这就正如著名数学家柯朗所指出的："一个人必须牢记，'具体'、'抽象'、'个别'和'一般'这些术语在数学中没有稳定的和绝对的含义。它们主要涉及一个思想框架，一个知识状态以及数学本体的特征。例如，已被列为熟悉的事物很容易被看做具体的。'抽象'和'推广'这些词描述的不是静止情况或最终结果，而是从某些具体层次导向更高层次的动态过程。"② 显然，这也就从又一角度表明了认识的不断深化正是在抽象化与具体化的辩证运动中得以实现的：新的认识即是把不熟悉的概念纳入已有的认识框架，从而也就是一个"具体化"的过程；另外，所说的"具体化"则又为新的、更高层次上的抽象活动提供了直接的基础。

值得指出的是，上述这种由抽象到具体的转化过程，不仅对于个人的认识活动是必不可少的（并构成了认识活动的本质），而且对于整个数学共同体来说也是十分重要的。例如，由数学的历史发展可以看出，很多重要的

---

① J. Kapur：《数学家谈数学本质》，第209页，北京，北京大学出版社，1973。
② 同①，第121页。

数学定理的证明或证明方法，即如哥德尔不完备性定理、现代集合论研究中的“力迫法”等，都曾经历了一个较长的演变过程。这就是说，尽管一些定理从一开始就已获得了严格的证明（或者说，相应的证明方法在逻辑上是无懈可击的），但是，由于其内在的本质或证明思想并没有得到清楚的揭示，因此，人们又总是致力于对此作出进一步的分析和研究，直至其最终对大部分数学家来说成为“直观浅显、透彻明白”的东西，这种“具体化”的过程有时甚至要延续数十年、甚至上百年。

综上可见，我们就不应片面地强调抽象程度的不断增加，而应清楚地看到数学的无限发展正是在抽象化与具体化的辩证运动中得以实现的。

2. 一般化与特殊化

正如第一章中所已提及的，数学中的抽象不仅是指由特殊上升到一般（弱抽象），即是由原型中选取某一特征或侧面加以抽象从而形成比原型更为普遍、更为一般的概念或理论，而且也包括了特殊化（强抽象），即是通过引入新特征强化原型去完成抽象。从而，我们就不应将这里所说的“一般化”和“特殊化”与前面所说的“抽象化”和“具体化”混同起来。

其次，又如第一章中所已指明的，法国布尔巴基学派关于数学结构的分析已经清楚地表明：弱抽象和强抽象在数学的历史发展中都具有十分重要的作用，在两者之间还存在着互相依赖、相互促进的辩证关系。

为了清楚地说明问题，我们还可结合一般化方法与特殊化方法在数学解题中的应用进一步指明两者的重要

性及其辩证关系。

具体地说，对于特殊化方法在数学解题中的作用人们已经作了较为透彻的研究。这主要是：第一，通过特殊化可以更好地弄清题意。第二，我们可以通过特例的考察对可能的结论与可能的解题方法进行猜测，有时还可通过由一般向特殊的化归解决原来的问题。第三，我们可通过特殊化对已获得的解答进行检验。与此相对照，就一般化方法而言，人们却往往只是注意了它的构造性功能，即如何由某个特殊的数学对象出发通过“弱抽象”去构造出更为一般的对象，而忽视了这一方法在数学解题中的作用，或者说，对于一般化方法何以能在数学解题中发挥重要的作用尚缺乏深入的分析。（另外，人们往往也忽视了特殊化方法的构造性功能，而上述关于强抽象的论述则已清楚地表明了这种倾向的错误性。）

事实上，一般化方法在数学解题中也有着广泛的应用。例如由“轨迹作图法”在几何作图中的广泛应用就可清楚地看出：如所知，轨迹作图具有“化难为易”的功能，而由原来所求作的对象到相应轨迹的过渡事实上就是一个一般化的过程，也即是“从考虑一个对象过渡到考虑包含该对象的一个集合”。[①] 一般地说，一般化方法之所以能在数学解题中发挥重要的作用，主要就是因为，由特殊向一般的过渡常常为问题的分析提供了新的着眼点，从而也就为问题的解决开拓了新的可能性。例如，通过一般化，就可以促使我们将着眼点由单一的问

① 波利亚：《怎样解题》，第107页，北京，科学出版社，1982

题转移到一系列问题的相互关系，而这往往就为问题的解决提供了新的可能性，诸如通过“递推”，由简到繁地、“逐个地”去解决这些问题。

从而，就如希尔伯特所指出的：“在解决一个数学问题时，如果我们没有获得成功，原因常常在于我们没有认识到更一般的观点，即眼下要解决的问题不过是一连串有关问题中的一个环节。”当然，又正如希尔伯特所指出的：“在讨论数学问题时，我们相信特殊化比一般化起着更为重要的作用。可能在大多数场合，我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因，是在于这样的事实，即有一些比手头的问题更简单、更容易的问题没有完全解决或完全没有解决。这时，一切有赖于找出这些比较容易的问题并使用尽可能完善的方法和能够推广的概念来解决它们。这种方法是克服数学困难的最重要的杠杆之一。”①

综上所述，我们就不应片面强调一般化或特殊化，而应明确地肯定一般化与特殊化的辩证运动正是数学发展的一个基本规律。

3. 多样化与一体化

正如第一章中所提及的，数学现代发展的一个决定性特点即是其研究对象的极大扩充：它所研究的已不仅是具有明显直观背景的量化模式，而且是各种可能的量化模式。显然，这也就清楚地表明了多样化正是数学发展的一种重要形式。

---

① 希尔伯特：“数学问题”，载《数学史译文集》，第63页，上海，上海科学技术出版社，1981。

但是，在肯定数学发展的多样化趋势的同时，我们又应清楚地看到数学中并存在有强大的统一趋势。这就正如著名数学家迪多内（J. Dieudonne）所指出的："人们经常给自己提出这样的问题，数学的蓬勃发展会不会窒息它未来的进步：事实上不可能有包括数量如此之多、概念和成果如此之丰富的理论，因而导致了极端的专业化和理论之间更严重的隔离，最终由于缺乏有生命力的新思想而使它们衰败下去。我们确实知道有理论枯竭这种例子，然而幸运的是，我们已多次重复过，在数学中存在着减少这种危险的强大而统一的趋势。"①

具体地说，数学中的统一化趋势首先表现于各个分支的相互渗透，特别是一个数学分支常常通过由另一分支中吸取概念和方法获得重要的进步，即如解决了某一久久未能得到解决的问题，甚至是开拓了一个新的研究方向。也正因为此，在数学中就经常可以看到以下的现象："数学如今生气勃勃，其分支如此之多，各分支又如此之广博，几乎无人能知其全部。因此，自然而然，我们，无一例外，常常出席一些学术演讲会，我们对讲演的课题所知甚少……但这不要紧，无论这个演讲是关于无界算子，交换群，还是关于可平行曲面。相距很远的数学各部分之间的互相影响常会出现。一个部分的概念、方法常会对所有其部分有启示。这一体系作为一个整体的统一性是值得令人惊叹的。"②

---

① 迪多内："论数学的进展"，载《数学史译文集》，第129页，上海，上海科学技术出版社，1981。

② 哈尔莫斯："应用数学是坏数学"，载邓东皋等编，《数学与文化》，第164页，北京大学出版社，1990。

其次，除去各个分支的相互渗透，数学中的统一化趋势更表现于以下的事实：由于揭示出了共同的本质，一些原来被认为是互不相干、甚至是互相对立的理论得到了统一。在数学史上也可看到很多这样的例子。例如，借助于F·克莱因关于几何学所研究的是（各种）变换群之下的不变量的思想，原先被分割成许多几乎互不相干分支（如欧氏几何、仿射几何、射影几何等）的几何学就重新获得了统一。

从而，总的来说，就如希尔伯特所指出的："今日的数学科学是何等丰富多彩，何等范围广阔！我们面临着这样的问题：数学会不会遭到其他有些学科那样的厄运，被分割成许多孤立的分支，它们的代表人物很难相互理解，它们的关系变得更松懈了？我不相信有这样的情况，也不希望有这样的情况。我认为，数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正是在于各个部分之间的联系。尽管数学知识千差万别，我们仍然清楚地认识到：在作为整体的数学中，使用着相同的逻辑工具，存在着概念的亲缘关系。同时，在它的不同部分之间，也有大量相似之处。我们还注意到，数学理论越是向前发展，它的结构就变得越加调和一致，并且，这门科学一向相互隔离的分支也会显露出原先意想不到的关系。因此，随着数学的发展，它的有机的特性不会丧失，只会更清楚地呈现出来。"①

最后，从更深的层次看，我们在此显然又应明确肯

① 希尔伯特："数学问题"，载《数学史译文集》，第82页，上海，上海科学技术出版社，1981。

定在多样化与一体化之间所存在的辩证关系：不同理论的相互渗透与比较，导致了更为深刻的认识以及新的、更高层次上的统一；新的统一性概念或理论的建立则又为创造更多的新概念和新理论提供了直接的基础。

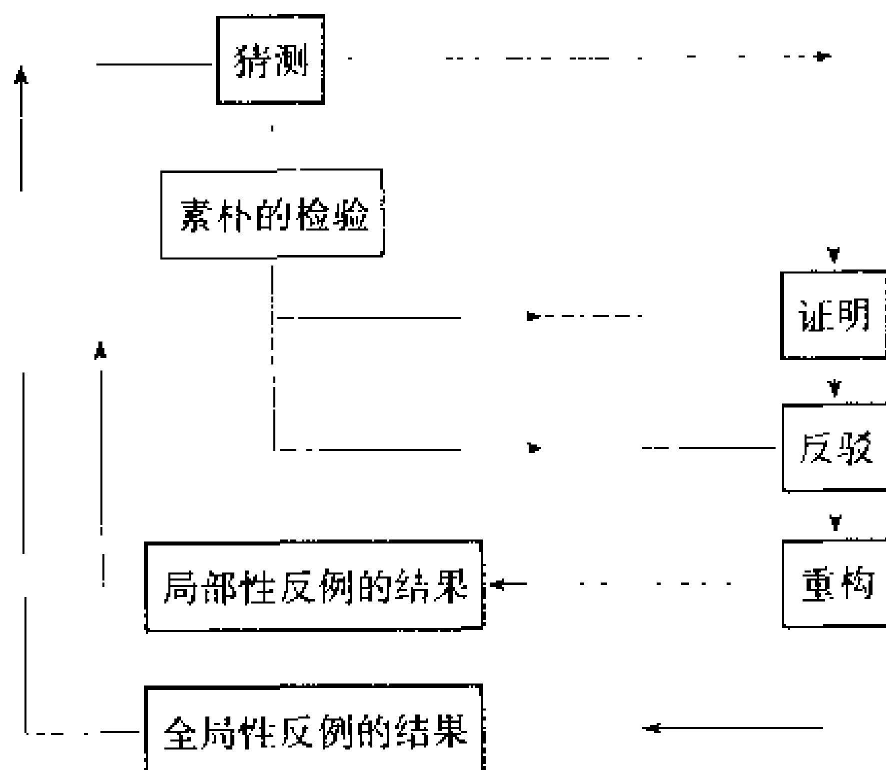
综上可见，多样化与一体化的辩证统一也应被看成数学发展的一个基本规律。

4. 证明与反驳

首先，我们应当明确肯定“证明”在数学发展中的重要地位，这也就是数学与一般自然科学相比其特殊性的一个重要表现。其次，作为问题的另一方面，我们又应看到，猜想与反驳在数学的历史发展中同样占有十分重要的地位。

事实上，数学的无限发展正是在“证明”与“反驳”的辩证运动中得以实现的：就其最终表现而言，数学建立在严格的论证之上；但数学研究又并不总是那么严格的，因为只有依靠直觉，依靠大胆的想象与猜测，并通过多次的反复、即“猜想”与“反驳”，我们才能发现并最终获得可靠的知识。另外，同样重要的是，严格性又并非一个绝对的概念，而是具有一定的历史性和相对性，或者说，即是体现了数学共同体的一种共同信念，从而，随着数学的发展，严格性的概念也必然地有一个演变和深化的过程，而作为这种历史发展性的一个直接结果，一些隐藏的假设和隐蔽的错误会不断得到揭示和纠正，一些不那么严格的证明也会不断得到改进，从而，总的来说，证明与反驳的辩证运动就必然会贯穿于数学的全部发展历史。

值得指出的足，著名数学哲学家、科学哲学家拉卡托斯（I. Lakatos）在其名著《证明与反驳》中曾通过历史案例的具体分析从方法论的角度指明了证明与反驳的辩证关系。具体地说，拉卡托斯认为："非形式的、拟经验的数学的增长并不是无可怀疑地建立起来的定理单纯在数量上的增长，而是依靠思辨和批判、依靠证明和反驳的逻辑不停地去改进猜想。"[1] 这也就是说，我们应当努力发现反例以驳斥所已给出的关于素朴猜想的"证明"，进而，借助于反例我们又可发现原先"证明"中隐蔽的前提，从而，通过将所说的前提"明朗化"，我们就可获得改进了的猜想。按照戴维斯和赫斯的解释，对拉卡托斯所提出的这一发展模式可以具体表示如下：[2]：



① 拉卡托斯：《证明与反驳》，第5页，上海，上海泽文出版社，1987。
② 参见戴维斯、赫斯：《数学经验》，第263页，南京，江苏教育出版社，1991。

显然，这就更为清楚地表明了在证明与反驳之间所存在的“真正的辩证的统一性”。

5．连续性与间断性

显然，上述关于证明与反驳辩证关系的分析，即已从较小范围表明了数学的发展正是“连续”与“间断”的辩证统一。为了更清楚地表明这样一点，我们再结合“数学中是否存在有革命”的问题对此作出进一步的分析。

具体地说，为了对上述问题作出明确的解答，我们必须首先对“革命”和“数学”这样两个更为基本的概念的涵义作出澄清。第一，按照第二章的分析，我们显然不应把数学简单地等同于命题或公式的汇集，而应把数学看成一个由“命题”、“方法”、“问题”、“语言”等多种“知识成分”与“数学传统”组成的一个复合体；其次，对于“（数学中的）革命”则应理解成发展的明显的不连续性，也即是指新的发展是与原来的传统明显地不相容的，然而，这一发展最终却获得了成功，并在很大程度上改变了整个数学（或有关分支）的面貌。

按照以上的解释，由数学历史的实际考察即可看出，数学中确实存在有革命。例如，非欧几何的建立显然就是这样的例子（可参见第六章），因为非欧几何本身即是与传统的数学思想完全不相容的，或者说，非欧几何的建立就以与传统思想的决裂作为必要的前提；另外，非欧几何在数学中地位的确立又极大地改变了整个数学的面貌，这就正如克莱因所指出的：“非欧几何……的创造引起数学的一些重要新分支，但它的最重要影响是迫使

数学家们从根本上改变对数学的性质的理解，以及对它和物质世界的关系的理解……”[1]（可参见第六章。）

由于数学革命所造成的主要是数学观的巨大变革，因此，就数学的“知识成分”与“数学传统”的区分而言，我们就可以说，数学革命主要是指“数学传统”的革命；但是，作为问题的另一方面，我们又应看到，由于在数学的这两种成分之间存在着互相渗透的辩证关系，因此，“数学传统”的革命就必然会造成数学的“知识成分”在一定程度上的变化，即如意义或范围的变化等。例如，非欧几何的建立显然就极大地改变了传统数学的意义。从而，即使就“知识成分”而言，数学的发展也不应被说成单纯的量的积累，而必然包含有一定的质的变化。（显然，这也就从又一角度表明了数学中不存在任何绝对的东西。）

最后，在肯定数学中存在有革命的同时（这是数学与一般自然科学同一性的表现），我们还应注意到数学革命具有自己特殊的表现形式。这就是指，数学中的革命并非表现为先前的理论为另一相对立的理论所完全取代，也即对前者的彻底废除；与此相反，即如非欧几何的例子所清楚地表明的，在此出现的往往是两种理论共存的局面，或者更恰当地说，这时先前的理论常常是在新的形式下得到了保存。从而，就如亚历山大洛夫所指出的，数学的发展“不是用破坏和取消原有理论的方式进行的，而是用深化和推广原有理论的方式，用以前的发展作准

---

① 克莱因：《古今数学思想》，第三册，第275页，上海，上海科学技术出版社，1979。

备而提出新的概括理论的方式进行的。"①

显然，这也就更为清楚地表明了在数学发展的连续性与间断性之间所存在的辩证关系。

3.2　数学文化：一个开放的系统

就数学的文化研究而言，这是一个十分突出的问题，即数学能否被看成是一个完全封闭的系统？这也就是说，数学的发展能否被看成是由其内在因素所惟一决定的？

为了对上述问题作出明确的解答，我们仍可先来看前面所已提及的"多重发现"的问题，即数学中重大发现或发明往往是多个数学家相互独立、而又几乎是同时作出的。

如前所述，数学史上"多重发现"屡见不鲜的现象的确表明了数学发展有其自身的规律性；但是，由数学史的实际考察我们又可看出，尽管这些创建者的贡献大致相同，但他们的命运却又往往有着十分巨大的差异。例如，尽管罗巴切夫斯基与鲍耶已成功地创立了非欧几何，但他们的工作在很长时期内未能得到应有的重视，而只是由于高斯的有关信件在其身后得到了披露，非欧几何才真正获得了数学家的普遍关注。

由于这正是数学发展史上的一个普遍现象，因此，怀尔德也由此而提出了如下的规律：

规律4　一个新的数学概念的创造者的名望和地位在该概念的可接受性方面起着强制的作用，尤其是在新概

---

① 亚历山大洛夫：《数学——它的内容、方法和意义》，第一卷，第33页，北京，科学出版社，1984。

念突破了传统时是这样；对于新的术语或符号的创造也是这样。

就我们目前的论题而言，这显然就表明了：除内在的因素外，社会和文化的因素在数学的历史发展中也发挥了十分重要的作用。

为了更清楚地说明问题，我们还可对数学史中所谓的“超前现象”作一分析。

如众所知，除“多重发现”外，在数学史中我们并可经常看到这样的现象，即某个或某些天才人物作出了某项重要的数学发现或发明，但这项发现或发明的重要性在当时却没有为人们所认识，以致逐渐为人们所遗忘了，而只是在若干年以后，由于这一结果又重新得到了发现或发明并得到了普遍的重视，原先的工作也才最终获得了正确的评价。例如，尽管德沙格早在 17 世纪初就已初步发展起了射影几何，但只是到了19 世纪，这一理论才获得了普遍的重视并最终得到了建立。

容易看出，这种“超前现象”在很大程度上即可依据数学自身的发展程度得到解释：由于有关的发现或发明背离了当时数学发展的主流，特别是超越了当时普遍的认识水平，因此，所说的发现或发明在当时就不可能获得普遍的重视；但是，在此我们仍应看到外部因素、特别是创造者所处的社会－文化环境所发挥的重要作用。例如，通过数学史的具体考察，怀尔德指出，缺乏必要的文化交流（这既可能由于创造者远离当时的文化中心，也可能由于创造者使用了难以理解的语言和符号），往往也是造成所说的“超前现象”的一个重要原因。

从而，从总体上说，我们就应明确肯定社会－文化环境对于数学历史发展的重要作用。（应当指明，作为数学史上各个发明创造的具体分析，我们不仅应当注意数学发展的内在规律与发明创造的外部环境等客观因素，而且也应注意考察相关数学家的个体特殊性。例如，如果忽视了后一因素，我们显然就无法对下列的事实作出合理的解释，即在外部环境并不十分有利的情况下，一些数学家何以可能作出“超越时代”的发明或发现。也正是在这样的意义上，笔者以为，数学的发展就不能被看成是由所说的规律所必然地决定的，毋宁说，其中也一定包含有偶然的成分。这就是说，数学的无限发展正是由必然性和偶然性所共同决定的。显然，以上的分析事实上也就清楚地表明了在数学发展的规律与自然科学中的一般规律之间所存在的重要区别。如果借用波普尔的三个世界的理论，这种差异就可表述为：尽管数学发展的规律也反映了“客观事物”的必然联系，然而，由于其所涉及的是世界 3 而并非世界 1 中的对象，后者又正是人类思维活动的产物，即是人类认识活动的直接结果，因此，数学的发展就不仅涉及到了人类活动的社会－文化环境，而且也必然地包含有个体的特殊性或偶然性。最后，也正是从这样的角度去进行分析，笔者以为，个别数学家在数学历史发展中所发挥的作用不应被看成完全被动和无足轻重的，我们更不能认为在其背后存在有某种“神秘的力量”，而数学家们则只是这种神秘力量的不自觉傀儡。）

也正是从这样的角度去进行分析，怀尔德提出了如

下的规律：

规律22 数学中最活跃时期出现的充要条件是，存在有合适的文化气候，包括机会、刺激（如新领域的出现，悖论或矛盾的发现等）和材料。这就是说，存在有合适的社会－文化环境正是数学健康发展的一个重要条件。（显然，对于经历了“文化大革命”这一惨痛经历的中国数学工作者来说，这是一个最为明确的事实。）

特殊地，怀尔德在此并曾明确地肯定了“文化传播”对于数学发展的积极意义：

规律10 不同文化与不同领域之间的传播经常会导致新概念的产生并加速数学的发展，假设接受的一方已经达到了必要的文化水平的话。

由于认为一般的文化环境既可以对数学的发展产生重要的促进作用，也可能产生一定的消极作用乃至严重的制约作用，因此，怀尔德不仅明确地提出了“文化阻滞”和“文化抵制”这样两种动力因素，更提出了如下的一般规律：

规律11 由一般文化及其各种子文化，诸如科学的子文化，所造成的环境力量，将在数学子文化中造成明显的反映。这种反映既可能是增加新的数学概念的创造，也可能是数学创造的减少，这取决于环境力量的性质。

例如，怀尔德指出，拒绝从外部文化中吸取更为有效的数字系统，即如在1299年意大利佛罗伦萨仍颁布法令，要求行会中的商人继续使用笨拙的罗马数字，而不要使用更为方便的印度－阿拉伯数字，就是文化阻滞的一个典型例子。另外，民族主义的情绪则直接导致了英

国数学家在很长时期内坚持采用牛顿的流数术而拒绝采纳莱布尼兹的更为方便的符号系统，这就可以看成文化抵制的一个实例，也即是由于不同的文化传统而对外来成分采取了更为强烈、更为自觉的抵制态度。

事实是，如果更为自觉地从社会－文化的角度去进行分析，特别是清楚地认识到各个数学家总是作为社会共同体的一员从事自己的研究活动的，也即总是处在一定数学传统的影响之下，我们就可更为深入地去揭示数学发展的一些规律性。这也就如怀尔德所指出的：

规律 9　在任何时候，都有一种为数学共同体的成员所共同享有的文化直觉，它体现了关于数学概念的基本的和普遍接受的见解。

规律 17　个别的数学家必须维持与数学文化主流的接触，而不能有其他的选择；他不仅受数学的发展状况和已有的数学工具的限制，而且必须适应那些即将走向综合的概念。

特殊地，在怀尔德看来，这种文化的考察也就清楚地表明了在数学的研究中我们必须明确反对各种绝对化的观念。即如，

规律 18　数学家们不时地宣称，他们的课题已经近乎“彻底解决了”，所有的基本结果已经得到，剩下的只是填补细节问题。

规律 19　文化的直觉主张，每个概念、每个理论都有一开端。

规律 20　数学的最终基础是数学共同体的文化直觉。

规律 23　由于数学的文化基础，因此在数学中不存

在什么绝对的东西，只有相对的东西。

显然，上述规律与第二章的论述是十分一致的，从而也就更为清楚地表明了数学活动的文化性质。

一般地说，就如第二章中所已明确指出的，我们在此即应肯定外部力量对于数学历史发展的决定性作用。

具体地说，就如先前的讨论所已表明的，数学在一定意义上可以看成一个自足的系统，而这不仅是指数学可以单纯凭借内在的力量得到一定的发展，而且是指数学具有自己特殊的价值标准和发展规律，从而，相对于外部而言，数学的发展就具有一定的独立性（特殊地，这显然也就是数学的发展何以可能具有一定“超前性”的一个主要原因）；然而，作为问题的另一方面，我们又应看到外部因素对于数学发展的重大作用：外部因素不仅为数学的发展提供了重要的动力，而且也提供了必要的调节因素和检验标准（显然，这与第二章中所论及的“现实真理性”的主导地位是直接相对应的）。

例如，如果已有的数学工作未能有效地满足外部的需要，就将促使数学家积极地去从事新的研究。即如二次世界大战就曾直接促进了系统分析、博弈论、运筹学、信息论等学科的研究和电子计算机的研究。

值得指出的是，与所谓的“遗传力量”相对照，怀尔德曾把这种外部的力量形象地称之为“环境力量”。怀尔德指出，对于所说的“环境力量”我们又可作出“物质成分”和“文化成分”的进一步区分，其中，所谓的“物质成分”即是指人类物质生活的直接需要，例如，在数学的早期发展中我们就可清楚地看到这种物质成分的

重要影响，即如几何在古埃及的早期发展就是由于土地丈量的直接需要；另外，怀尔德所谓的“文化成分”则不仅包括了一般的文化环境，也是指其他文化成分、特别是一般自然科学对于数学发展的影响。怀尔德指出，在物理学的历史发展中，“物质成分”始终有着最为重要的影响；然而，对数学来说却并非是这样的情况，因为除去早期的发展以外，促进数学发展的主要是其他科学、特别是物理学的需要，而并非人类物质生活的直接需要。

综上所述，数学的发展事实上就应被看成外部力量和内在力量共同作用的结果。这也就如怀尔德所指出的：

规律2　新概念的进化通常是由于遗传的力量、或者是由于借助环境力量得以表现的一般文化的压力造成的。

当然，我们在此又应明确肯定数学发展的辩证性质，也即应当清楚地看到在“环境力量”与“遗传力量”之间所存在的辩证关系。例如，这就正如希尔伯特所指出的：“在每个数学分支中，那些最初、最老的问题肯定是起源于经验，是由外部现象世界所提出。……但是，随着一门数学分支的进一步发展，人类的智力，受着成功的鼓舞，开始意识到自己的独立性。它自身独立地发展着，通常并不受来自外部的明显影响，而只是借助于逻辑组合、一般化、特殊化，巧妙地对概念进行分析和综合，提出新的富有成果的问题。……其间，当纯思维的创造力进行工作时，外部世界又重新开始起作用，通过实际现象向我们提出新的问题，开辟新的数学分支。”[①]

---

① 希尔伯特：“数学问题”，载《数学史译文集》，第61页，上海，上海科学技术出版社，1981。

最后，应当指出的是，如果说以上关于数学发展规律的分析主要立足于数学史的研究，那么，就数学的未来发展而言，我们显然又应注意分析社会的进步在这方面所造成的新的变化，特别是，我们即应清楚地看到计算机技术的迅速发展和广泛应用对数学未来发展所造成的重要影响。

具体地说，正如计算机为各行各业提供了新的有效工具，它也为数学研究提供了新的研究手段，这就是所谓的“计算机辅助数学研究”。对此著名数学家阿蒂亚(M. Atiyah) 曾经指出：“计算机第一位和最明显的用途简单地可称之为‘吃数字’。高速机器极其适合进行极为大量的重复计算，使得那些本来因太复杂而无法处理的问题可迅速地得到直接的数值答案。”当然，计算机对于数学研究的辅助作用并不只限于计算。例如，这也就如阿蒂亚所指出：“计算机的一大优点是能图示信息，这一优点刚刚才开始受到数学家的青睐。许多复杂的数学问题包含几何特征，图示为探索现象提供了一种极其有效的新工具。”另外，四色定理的证明又可以被看成“机器证明”的典型例子。从而，“概括起来，计算机在数学家研究的一切阶段为他们提供了极为实用的帮助。”[①]

其次，计算机的使用直接导致了数学中新的研究分支或研究方向。例如，由于计算机的使用使得大量过去无法实现的计算成为可能，这就不仅使一些传统的研究问题得以复活，而且还直接导致了一些新的研究分支，

① 阿蒂亚：“数学与计算机革命”，载ICMI研究丛书之一：《国际展望：九十年代的数学教育》，第33页，上海，上海教育出版社，1990。

例如"计算数论"、"计算几何学"等。另外，也有一些问题由于计算机的使用变得特别重要。例如，由于计算机的引进，尽管人们在两千多年前即已引进了"算法"的概念（这是指解决某问题的一个确定方法），这一概念现又获得了特别的强调，有关的研究并获得了新的内容。这也就如《计算机和信息科学对数学和数学教育的影响》一书中所指出的："近年来，由于计算机的引进，算法又唤起了人们的极大兴趣。……对许多同类问题已经开发了很多计算机算法。某些情况下，可用多种算法解决同一问题，诸如将名字按字典顺序排列或求一个矩阵的逆矩阵。此时，人们选择的算法，不仅要解决问题，而且还要是符合要求的好几种算法中'最佳'的一个。有些算法虽节省了运行时间，但可能浪费了内存空间，或者是反过来的情况，这就需要找出与一个或多个参数有关的最优的或至少是有效的算法，由此开辟了复杂度理论的研究。"①

在此我们并应特别提及对于离散数学的强调。这就正如《九十年代的中、小学数学》一书中所指出的，"计算机本质上是离散的机器，而且描述计算机功能所需的数学以及发展计算机软件所用到的数学也是离散的。其结果，对离散数学——布尔代数、差分方程、图论……的兴趣在近些年来已经有了巨大的增长。"②

最后，就如第二章中所已提及的，计算机的使用还

---

① 阿蒂亚："数学与计算机革命"，ICMI研究丛书之一：《国际展望：九十年代的数学教育》，第8页，上海，上海教育出版社，1990。
② 同①，第118页。

导致了数学观的重要变化，对此并可在多种不同的层次上清楚地看到。例如，计算机的使用正在改变人们关于什么是数学问题的“满意解”的认识：在计算机出现以前，数学家努力把问题的解处理成某种优雅的代数形式，包括熟知的代数和三角展开等具体形式；今天，应用数学中问题的令人满意的解则往往是指找到了一个可以产生人们有兴趣的一切数值的计算机算法。其次，计算机的使用更引起了人们关于数学本质的新的思考。例如，正如前面所已提及的，一些自称为“实验数学家”的新潮数学家正在创立一种新的作数学的方法，即主要通过计算机实验从事新的发现。由于这种研究方法是与传统方法很不相同的，因此，在这些数学家看来，计算机的使用就正在改变数学的性质：数学正在成为一门“实验科学”。最后，由于计算机技术的迅速发展和广泛应用大大加强了先前业已存在的“数学化”倾向，特别是极大地扩展了数学的应用范围（以至信息时代就可被说成“数学化的时代”），因此，这也就促使人们对数学的价值有了新的认识。这就正如美国数学教师全国委员会(NCTM)在《学校数学课程和评估的标准》这一指导性文件中所指出的：“计算机处理大量信息的功能使得在诸如贸易、经济、语言、生物学、医药、社会学等领域中实行量化并对信息进行逻辑分析成为可能，特别是在社会科学与生命科学中已经造成了巨大的变化。事实上，定量分析的技术几乎已经渗透到了智力活动的所有领域。”[1]

---

[1] NCTM:《Curriculum and Evaluation Standards of School Mathematics》, 1989, P. 7

显然，就我们目前的论题而言，计算机对于数学未来发展的影响就从又一角度更为清楚地表明了外部环境（包括社会物质技术条件）对于数学发展的重要影响。从而，总的来说，在承认数学发展相对独立性的同时，我们又不应把数学看成一个完全自足的封闭系统，而应清楚地看到外部力量对于数学发展的决定性作用，也即应当明确肯定数学系统在总体上的开放性。这也就是说，数学应当被看成是整个人类文化的一个于系统。显然，这即是一种更高层次上的数学文化观念。

第二篇　数学文化史的研究

数学文化史的研究，其基本立场就是把数学看成整个人类文化的一个有机组成成分，并从这样的角度指明数学历史发展的社会-文化渊源。本篇并非数学文化史的系统论述，也不是若干案例的详细考察，我们的目的是通过对古希腊数学、微积分理论和非欧几何这三个世界数学史上特别重要时期的相继考察，清楚地指明在整体性的文化环境与数学之间所存在的密切联系。特别是，西方数学的发展即是与西方文化中数学价值观的历史演变直接相联系的。另外，作为一种对照，我们还将从这样的角度对中国古代数学的历史发展作出简要分析，而这事实上就包括了对于中西古代数学的比较与评价问题在更高层次上的思考与分析。

第四章　古希腊与文艺复兴时期的数学

古希腊在数学历史发展中的地位是不容置疑的，本章将从文化的角度对毕达哥拉斯学派的数学研究和欧几里得的《几何原本》作出分析，即是具体指明上述发展的若干文化渊源及其对于古希腊理性精神历史形成的重要影响。另外，作为时间和空间上的延伸，在下半部分中我们将对文艺复兴时期的一些重要发展作出分析——后者不仅清楚地表明数学确应被看成整个人类文化的一个有机组成成分，而且也从一个侧面表明了数学理性精神对于数学及相关研究的重要意义。

4.1　古希腊文化中的数学

当人类逐渐脱离蒙昧走向文明的时候，不同的民族都会利用他们原始文明中的经验、思维方式给这个奇妙变化的世界一种解释：这个世界是如何构成的？它是怎样发展变化的？不同的民族文化对这种世界的解释表现出各自的智慧形态，有的民族（如在印度）采用了一种

从神秘走向宗教的解释世界的方式；有的民族（如在中国）则形成了阴阳学说、金木水火土“五行”学说等并以此来解释世界。与此不同，古希腊民族则采用了一种以数字、也即以数学解释世界的独特方式。

在人类的文明史中，以数字表述事物的现象应当说在各个民族的原始文化中都有记载，因为在人类的原始思维中，数与它所代表的事物往往具有某种一致性；另外，这更可以被看成原始思维的一个重要特点，即其中的数又常常伴随有一定的神秘色彩。这就正如法国著名人类学家列维－布留尔所指出的，人类在原始思维阶段，还不能清楚地把数与数所表示的事物完全区别开来，这种数是一种“数—总和”：数被想象为实体或客体的一种特殊的总和。在原始思维中，每个数都有属于它自己的个别面目、某种神秘的氛围、某种“力场”。数在集体表象中以它的名称与想象的总和的神秘属性互渗着。原始思维中的数不仅是一个算术的单位，而且还是一种神秘的实在。[1]

例如，在大多数北美印第安人那里“4”含有神秘的意义；在古巴比伦“7”有神秘的作用；中国文化中的1、3、9等都具有神秘意义，例如“道生一、一生二、二生三、三生万物”就表明中国原始思维中对数字“3”有种神秘意义的保留。

从历史的角度看，这种原始数学的神秘性在其自身的发展中无非有以下三种可能性。第一，这种原始数学

---

① 列维－布留尔：《原始思维》，第201～202页，北京，商务印书馆，1985。

神秘性在发展过程中由于数学自身操作运演意义的突出而逐渐消退，即使个别数字还保留某些神秘性，但数学作为一个整体则主要表现为一种操作运演系统。第二，数学的原始神秘性融入宗教，数学原始神秘的作用在宗教中发展。第三，数学的原始神秘性以其自身的神秘解释力量演变发展为一种对整个世界的解释，进而以自己的独特操作运演形式成为一种新的带有数量意义而非神秘意义的解释世界的形式。古希腊的数学所采取的正是第三种发展道路。

在历史上，古希腊文化是继承和吸收爱琴海的米诺斯文明、埃及文明和腓尼基文明而形成的后继文明，它吸收这些文化中的某些数学神秘主义的文化传统，并进而把它发展成为一种以数学来解释世界的独特方式。在这一发展过程中，毕达哥拉斯学派起到了一个继承、创新和发展的文化中继站的作用。

毕达哥拉斯学派的创始人毕达哥拉斯约公元前572年出生于爱琴海的萨摩斯岛（Samos），他在当时的米利都城学习之后可能游历过埃及和巴比伦，后来成立了一个带有宗教、哲学和科学性质的组织，即后人所谓的毕达哥拉斯学派。

毕达哥拉斯学派对数学的观念带有浓厚的原始文化的数学神秘色彩。亚里士多德曾说，毕达哥拉斯学派把数看做是真实物质对象的终极组成部分。[1] 这种“万物皆数”的观点就构成了毕达哥拉斯学派的核心观念。

---

[1] 克莱因：《古今数学思想》，第一册，第34页，上海，上海科学技术出版社，1979。

据传，毕达哥拉斯学派关于谐音的研究对于其核心观念的形成起到了十分重要的作用。他们发现，弹弦音质的变化来源于弦长短的数量变化，而两根绷得同样紧的弦如果它们的长度成整数比，那么就会发出谐音。既然音乐这种似乎与数毫无联系的现象最终都可以用数得到解释，这就极大增强了毕达哥拉斯学派用数来解释世界的信心。

由上述的信念出发，毕达哥拉斯学派又进而提出行星的运动也可用数的关系来表示。由于认为物体在空间运动时会发出声音，运动得快的物体比运动得慢的物体所发出的声音要高，因此，毕达哥拉斯学派认为，行星的运动最终也可通过“天际的音乐”表示为数与数之间的关系：离地球越远的行星运动得越快，各个行星则因其离开地球距离的不同而使发出的声音配成和谐之音。

也正是基于神秘和解释世界的目的，毕达哥拉斯学派对50以下的各个数字几乎都赋予了某种独特的意义。例如，他们认为偶数是可分的，因而是可消失的、阴性的、属于地上的；奇数是不可分的、阳性的、属于天上的。4可以看做是公平的数，因为它可以一分为二；5可以看做是一个婚姻数，因为它是阴阳的结合。另外，出于同样的目的，他们还对一些特殊形式的数进行了研究。例如，毕达哥拉斯学派提出，如果一个数（如1、3、6、10等）作为一个点（组）可以排成一个三角形，这个数就是三角形数；类似地，我们也可对所谓的“正方形数”、“五边形数”等作出定义，如1、4、9、16等就是所说的正方形数。再例如，毕达哥拉斯学派还提出了“完

全数”和“亲和数”等概念。如果一个数（如6、28等）等于它的所有不同于自身的因数的和，就称为完全数；不然的话，则可按照其自身与其因数之和的大小比较分别称为盈数（也译作过剩数）和亏数（不足数）。另外，如果两个数分别等于另一个数的因数之和，这两个数就称为亲和数，如284和220就是这样的亲和数。

从数学的角度看，毕达哥拉斯学派对数的研究与我们今天显然是不一样的，而这又不仅是指毕达哥拉斯学派所说的数仅仅是整数，而且也是指他们没有把数和几何上的点区别开来，恰恰相反，他们从几何的角度把一个数看做是一个扩大了的点或者是一个很小的球。也正因为此，算术（作为数的理论）和几何学就成为了毕达哥拉斯学派的两门基础学科；另外，又由于毕达哥拉斯学派把音乐和天文的研究也“归结”为数的研究，因此这两门学科就同算术、几何发生了必然的内在联系，并与算术和几何学一起成为毕达哥拉斯学派的基本研究和教授的课程。

综观毕达哥拉斯学派的数学研究，人们可以清楚地看到其对原始数学神秘性的继承和发展，但是，这种神秘数学研究却又把人们对世界的认识和理解引向了一条数学化的道路。首先，就数学自身的研究而言，纯粹的数论研究即应首先归功于毕达哥拉斯学派；其次，从数学的文化意义上来说，毕达哥拉斯学派对数的研究则是人类第一次用数学来研究世界、研究自然的本质，是人类第一次企图从数与数的关系上来解释世界、解释自然（可参见8.1节）。

具体地说，尽管毕达哥拉斯学派的数学研究在今日看来有些荒诞，但是把世界看做是由点也就是由数构成的，把数看成是既是点又是物质的微粒，认为数是宇宙万物的实质和形式，认为数是一切现象的本原，这种"万物皆数"的观念无疑把人们对世界的认识从神秘主义和随意性的混乱中解脱出来，也即使人们看到了一种隐藏在各种表面看来毫不相干的事物间的和谐关系，并就可以用数把它们的本质表现出来、揭示出来。显然，从这样的角度去分析，我们也就可以清楚地看到毕达哥拉斯学派的数学研究对于古希腊文化的后期发展有着宗教和哲学上的重要意义。

就毕达哥拉斯学派对于后人的影响而言，我们还应特别提及柏拉图（公元前427～公元前347）的重要贡献，尽管后者主要是一个哲学家而并非数学家。

具体地说，作为一个哲学家，柏拉图突出地强调了数学对于哲学和了解宇宙的重要作用，以至被认为是"仅次于毕达哥拉斯本人的最杰出的毕达哥拉斯派"，"是传播这种主张的最有影响的一个人，即认为只有通过数学才能领悟物理世界的实质和精髓。"① 正如第一章中所已提及的，按照柏拉图的观点，就对于世界的认识而言，我们应当首先作出关于"理念世界"与"现实世界"的明确区分：前者是真实的、完美的、永恒的、不变的；后者则是不真实的、有缺陷的、暂时的、变动的，并只是前者的一种不完美的抄件（拷贝）。由于数学对象被认

① 克莱因：《古今数学思想》，第一册，第171页，上海，上海科学技术出版社，1979。

为是理念世界中的一种存在，因此，在柏拉图看来，这事实上就为我们超越眼前的尘世（现实世界）并获得关于真实世界（理念世界）的知识提供了一条捷径。对此柏拉图曾形象地比喻道，就像久居在洞穴中的人当其突然来到阳光之下会被阳光刺伤眼睛一样，人类也只有作好了充分准备才能较好地接受来自理念世界的阳光，而数学就是帮助我们实现所说的"由黑暗到光明"的转变的主要手段，因为在数学中我们所处理的都是理想化的对象，从而就已包含了由经验向理念的过渡。

事实上，与毕达哥拉斯学派一样，对柏拉图来说，世界之按照数学来设计一事是毫无疑问的。柏拉图指出，"神永远按几何规律办事。"柏拉图并曾试图从这样的角度对世界的本原作出进一步的具体论述。柏拉图指出，构成物质世界的真正元素并不是土、气、火和水等具体物质，而是五种正多面体，因为这些元素的每一个原子都是正多面体：土的原子是立方体，火的原子是正四面体，气的原子是正八面体，水的原子是正二十面体，另外，正十二面体所对应的则是宇宙。这样，在柏拉图那里，数学就成为了构造世界的基石。

总的来说，柏拉图对于数学重要意义的突出强调极大地激励了他的同时代人和后人积极地去从事数学的研究。事实是，公元前4世纪时几乎所有重要的数学工作都是柏拉图的朋友和学生作的。另外，除去这种间接的影响以外，柏拉图的思想对于当时的数学研究还有着一些更为直接和深层次的影响。对此由古希腊最为重要的数学著作《几何原本》就可清楚地看出。

如众所知，《几何原本》是由欧几里得通过收集、整理前人和别人的成果并加以自己的独特的构造设计所完成的一部划时代著作。《几何原本》全书13卷，共有467个命题。作为全书的开卷，欧几里得首先精心选择了23个定义；其次，他又按当时亚里士多德所提出的公设与公理的区别（亚里士多德认为，公理是一切科学所共有的真理，而公设则只是各门科学所特有的第一性原理），分别列出了五个公设和五个公理（其中的第五公设——同一平面内一条直线和另外两条直线相交，若在某一侧的两个内角的和小于两直角，则这两条直线经适当延长后在这一侧相交——曾引起了广泛的争论和进一步研究，从而直接导致了非欧几何的诞生。关于后者我们将在第六章中作出专门讨论）；最后，欧几里得通过逻辑演绎由所说的公设和公理（并依据相应的定义）逐一引出了所说的各个命题。

对于欧几里得的上述贡献人们普遍给予了高度评价：

在古希腊的历史中，在毕达哥拉斯之后可以找到许多数学家和哲学家，但是，他们之中却没有哪一位可以与欧几里得和他的《几何原本》对后世的影响相媲美。

在人类的数学历史上，各个民族都可能作出过一定的贡献，但是，它们之中又没有哪一个其重要性能超过古希腊人经由几何研究而发展起来的推理证明的逻辑演绎模式。

应当明确，《几何原本》并不是单纯地讲授几何，而是包括了几何数论和初等代数的一些内容。事实上，《几何原本》的英文书名为《Elements》，故应译作《原本》，

而《几何原本》中的“几何”二字是由利玛窦与徐光启在1607年将其翻译成中文时所添加上去的。

具体地说，《几何原本》的第一卷到第四卷主要是直边形和圆的基本性质及有关的命题。

第五卷是比例理论，这一卷把比例关系的理论推广到不可公度的量从而避免了无理数。

第六卷是利用比例理论讨论和研究相似形的问题。

第七、八、九卷是数论理论，它讨论研究了有关整数和整数之比性质的有关命题。

第十卷是不可公度量的分类。

第十一、十二、十三卷讲授的是立体几何的有关命题。在这些命题中，欧几里得运用了严格的不含明确极限步骤的穷竭法。第十三卷的最后一个命题（命题十八）所证明的是最多只能有五种正多面体，即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体。

从上述的内容可以看出，前人的数学研究成果对于欧几里得撰写《几何原本》的确有着十分重要的影响。

例如，当时雅典的巧辩学派提出了几何作图的三大问题：化圆归方——作一个正方形使其面积等于一个已知圆的面积；倍立方体——作一立方体使其体积等于已知立方体的体积的两倍；三等分任意角。这些问题的解决要求只许用直尺和圆规来进行。欧几里得把这种由实际应用向演绎证明的发展在《几何原本》中用公设的形式明确地规定了下来。

再例如，毕达哥拉斯学派关于无理数——不可公度线段的发现给量的表示造成了极大的困难（可参见5.3

节），而欧几里得在第五卷中则通过对比例理论（数学史学者认为这些理论的材料来源于欧多克斯）的精彩论述使比例理论中的量既可应用于可公度量也可用于不可公度量，从而就较好地避免了由于无理数的发现所造成的“困境”。

另外，在《几何原本》之前，古希腊埃利亚学派的芝诺曾提出四个著名的悖论，从而使哲学家和数学家在表述和解释世界时不得不深入思考有关无限的问题，而欧几里得则通过采用穷竭法（这个方法亦源于欧多克斯）不仅对相关的定理进行了准确严格的演绎证明，而且也成功回避了有关无穷或无限所可能引起的矛盾（对于芝诺悖论和穷竭法可参见5.1节）。

但是，除去上述这种纯数学方面的因素以外，我们又应从更为广泛的角度去进行分析，也即应当清楚地看到促成《几何原本》的各种社会－文化因素。

例如，就欧几里得对于演绎证明的强调而言，我们显然应当特别提及亚里士多德的重要影响。一般地说，这事实上就是亚里士多德对于古希腊文化数学理性追求的一个重要贡献，即是通过使逻辑规律典范化和系统化，从而为数学的演绎形式提供了必要的基础，更直接孕育了欧几里得的巨著《几何原本》。

另外，我们在此还应当特别提及柏拉图对于欧几里得的重要影响。事实上，由上面的介绍我们已经知道，《几何原本》最后一卷的最后一个命题是关于五种正多面体问题的总结性论证，从而也就是对于柏拉图宇宙生成理论的极好呼应，或者说，欧几里得在此即是从数学上

为柏拉图的哲学理论提供了一个坚实的理论基础，即是如何从观念（定义、公设、公理）出发运用逻辑形式表现数学命题，从而表现出世界的模式。也正是基于这样的认识，著名科学哲学家波普尔指出，《几何原本》并不是一种几何学的运用，而是一种世界理论的研究原则，它“试图系统地解决柏拉图的宇宙论的主要问题”。波普尔并曾指出，“这样做获得了很大成就，因而许多问题解决之后就不复存在，而且几乎都被忘却了。”①

事实上，即使就对于逻辑演绎的强调而言，我们也可看到柏拉图乃至毕达哥拉斯学派的重要影响。

首先，毕达哥拉斯学派对于世界构成和运转变化的研究显然已经表现出了一种超越具体事物、具体问题之上的追求真理的倾向；进而，在柏拉图那里，毕达哥拉斯学派关于用数学解释世界的观点又得到了进一步的发展，数学并已脱离具体问题的操作运演而成为了表现世界的一种方式，这样，逻辑推理作为一种超越具体问题、具体数学命题的论证形式自然也受到了越来越大的关注。这就是指，如果说数学是通过超越具体问题（抽象化）获得真理的方法，那么，数学自身的逻辑运演就是获得真理的过程。

更为一般地说，这事实上正是当时的一种普遍倾向，即古希腊的数学家同时也是哲学家，而古希腊的数学则就是一种脱离具体数量意义的哲学，是表现真理的一种形式。这样，作为“哲学家所追求的真理总体的一部

---

① 波普尔：《猜想与反驳》，第123页，上海，上海译文出版社，1989。

分”，数学也就被“认为必须是演绎性的”。[①] 显然，这就从一个角度清楚地表明了欧几里得《几何原本》的特定社会－文化背景，即《几何原本》在很大程度就可被看成柏拉图哲学、亚里士多德的逻辑学和当时数学理论的一个完美结合。

与上述关于《几何原本》特定社会－文化渊源的分析相对应，我们也只有从这种更为广泛的角度去进行分析，才能更深刻地认识《几何原本》的历史意义。

具体地说，由上面的介绍我们已可清楚地看出欧几里得这一工作的数学意义：由于欧几里得系统地收集、整理、筛选了古希腊已有的数学成果，并对此进行精心的安排和处理，不仅很好地避开了所已发生的各种困难，更按照当时的逻辑方法将其组织成了一个演绎系统，从而，就在人类数学史上第一次给出了一个公理化了的数学理论体系。

也正因为此，《几何原本》就跨越地域、民族、语言和时间的一切障碍而传播到了整个世界，公理化方法作为数学的一种理论形式更为人们所普遍接受。这就是说，人们现已普遍地建立了这样的认识：所有的数学理论，都必须按照数学的定义、公理（公设）和三段论式的逻辑论证来组织，并由此构成数学结构的大厦。从而，《几何原本》事实上就已成为数学发展中高高树起的一面旗帜，西方数学乃至今日全部的数学都跟随这个飘扬的旗帜而前进着。也正是在这样的意义上，我们即可毫不夸

① 克莱因：《古今数学思想》，第一册，第52页，上海，上海科学技术出版社，1979。

张地说，《几何原本》作为人类智慧的光辉结晶，它在数学史上的作用是没有任何一本著作可以与之比拟的。

进而，当我们超越数学的狭小范畴，把《几何原本》放在古希腊文化的系统中，并从文化史的宏观角度去进行分析，我们就可看到《几何原本》有着更为广泛和重要的意义。

具体地说，由上面的讨论我们已经知道，在古希腊文化的意义上，《几何原本》依据柏拉图哲学、亚里士多德的逻辑学和欧几里得的精心构思，所表现出的已不仅是一种数学命题的真理性特征，更为重要的是它借助数学表现了一种认识世界、表述世界的独特文化意义，并由此给人们提供一种思维的理性方式：从几个简单的原理出发，可以逻辑演绎出整个理论体系，进而表现这个理论所揭示的真理。一种数学方法能最终演化成为一种认识世界的理性思维方式，这不能不说是数学所能达到的最高的文化意义。

特殊地，从方法论的角度说，《几何原本》则可说是为真理的探求提供了直接的范例，或者说，即是在整个文化系统中发挥了一种“整流”和“放大”作用。所谓“整流”，即是指一种方法和思维模式一旦取得文化系统中典范的地位，就会促使整个文化系统中各个方面的经验、知识都按照这一经典模式进行整理；所谓“放大”则是指在按照经典模式进行整理的过程中，人们又必然会进行一些选择、建构以及再创造，并按照经典的模式进行理论建构，从而使原来零乱的无条理的经验、知识形成一个与经典理论模本相似的理论体系。由历史的考

察可以看出，古希腊文化在欧几里得之后，它的各种学科都按照《几何原本》体系进行了再构造；另外，文艺复兴之后，古希腊文化的复活更使《几何原本》成为整个西方文化中的一个理性模式，物理、化学、天文、医学、哲学、逻辑等无一不是按《几何原本》的形式进行了理性构造（可参见9．2节）。例如，牛顿的《自然哲学的数学原理》显然就可看成其中的典型代表。

更为一般地说，《几何原本》的成功更极大地增强了古希腊人关于自然界是依据数学方式设计的信念，并使整个古希腊文化具有了一种深远的从数学探求真理的精神。这种理性的信念和精神作为古希腊文化的精髓后来为整个西方文化所完全吸收和继承（可参见8．1节）。

最后，为了清楚地说明问题，我们再从更为一般的角度对古希腊数学与文化的关系作一分析。

由历史的考察可以知道，公元前500年左右是人类文化的一个大发展时期。在华夏文明中那是春秋战国时期，诸子百家中的各种学说如儒、道、阴阳、法、墨、纵横家等都先后在那个时代得以发展；在印度文明中，对世界产生重大影响的佛教正处于孕育和发展之中；在古希腊文明中爱奥尼亚学派、毕达哥拉斯学派、巧辩学派直到最有影响的柏拉图学派也都在这个时期出现和发展。更为一般地说，如果按照世界著名历史学家汤因比的划分，古代哲学流派中有一半在这一时期中发生和发展。①

作为一种横向比较，容易看出，以儒家为代表的中

---

① 参见汤因比：《历史研究》，第324页，上海，上海人民出版社，1980。

国文化主要表现了对社会和现存世界的关心，具有很大的“入世”特征。印度文化中的宗教发展，则更多关心灵魂的未来，从而就是一种“出世”的特征。然而，与中国和印度的文化都不同，古希腊的文化却表现了一种对现存生活世界本质、内在运转特征的执著追求。这也就是说，古希腊文化既非“入世”也非“出世”，而是表现了一种对既超越现存世界现象、又超越神秘灵魂之外的世界的规律性、构造性的追求。从而，这就正如伯恩斯所指出：“希腊人的文化是第一次被放在以认识为首位的基础上——被放在视自由探索精神为至高无上的基础上。他们没有什么不敢去探索的题目，他们认为没有什么应排斥在理性领域之外的任何问题。思想凌驾于信仰之上，逻辑和科学凌驾于迷信之上，达到了一个前所未闻的程度。”[①] 由上面的论述我们已经知道，也正是这种对于理性的普遍追求，为古希腊数学的发展，特别是毕达哥拉斯学派的数学研究和欧几里得的《几何原本》，提供了特定的社会－文化背景。

进而，古希腊文化中数学理念的形成，使人类第一次从数量和逻辑运演的角度来看待世界，从而给世界以一种定量的、精确的、逻辑的描述方式；而且，后一方面的成功反过来又极大地加强了人们关于自然界是有规律的、这些规律是可以为人们所认识的信念，并促使人们更为积极地去从事这种理性的研究。

特殊地，后者事实上也为数学的进一步发展提供了

① 伯恩斯：《世界文明史》，第一卷，第259页，北京，商务印书馆，1990。

一个十分有利的外部环境。首先，由于数学被看成一种理性的解释系统，这就使得人们更为集中于数学自身规律的研究，也即为数学创造了一种不依赖现实世界的思维创造的天地；同时，作为一种理性解释形式，这也为数学在所有领域的应用开拓了现实的可能性。其次，作为一种文化理性，作为一种解释世界的形式，数学吸引了整个民族中最优秀的人才，从而就为古希腊数学乃至西方数学的发展创造了良好的人才基础，这就是说，具有宗教和哲学意义的数学在人才吸引和培养方面有着其他学科不可比拟的优势。最后，作为一种文化的理性，作为一种文化的理性精神的表现形式，数学在文化传播中也必然会表现出一定的优越性。这就是说，只要古希腊文化得以保留，古希腊的理性精神就必然会得以保留和发展，古希腊的数学也必然会得到保留和发展，这样，古希腊就可说是用整个文化传统的力量来传播它的数学。显然，《几何原本》跨地域、跨时间、跨语言的传播就已清楚地表明了古希腊数学传播的非应用的理性力量；另外，由古希腊文化在文艺复兴中的表现我们也可更为清楚地看到这样一点。

4．2　文艺复兴时期的数学

古希腊数学作为古希腊文化的一种理性在亚历山大里亚时期得到了迅速发展，不仅天文学、医学、地理学等按照数学的模式进行构造，而且数学本身也在圆锥曲线理论、三角学理论、代数方程理论等方面都取得了长足进步。但历史总会给人们留下某些遗憾：亚历山大里

亚时期古希腊文化和数学的大发展未能一直继续下去，盛极必衰的规律不幸降临到了古希腊的头上。古罗马帝国的兴起正是古希腊文化和古希腊数学衰落的开始。

古罗马民族在人类历史上是一个伟大的民族，古罗马的文化也创造了许许多多的奇迹。古罗马的建筑、交通极为发达，他们建造了许多宏伟壮观的宫殿、庙宇以及公路网等。古罗马在法学和政治体制方面也为历史学家所赞扬。但是，在古罗马的文化中，一种农耕民族、耕战获胜民族所特有的务实精神却取代不了古希腊文化中的数学理性精神。历史学家们说，人类不同民族文化的进步发展是不断迎接挑战的结果。按这种观点分析，也许罗马民族接受的是务实耕战的挑战，他们的生活和历史没有能培养出玄思瞑想的形而上学的抽象和演绎的数学理性精神。

对于古希腊数学而言，阿基米德的命运也许就是它的预兆。数学史上把阿基米德、高斯和牛顿列为三大齐名的数学家。在亚里山大里亚时期，阿基米德的力学以及他所运用的几何与力学相结合的方法是古希腊数学对人类数学的伟大贡献之一。但是，古罗马的人侵使他成为战争的牺牲品。

古罗马对古希腊数学的继承只限于测量、划定城市边界以及建造方面的应用；而且，古罗马还把“数学”与占星术相联系——他们把占星术家称为数学家，而把几何学家与数学家相区别。古罗马把几何看做是可用于实际应用的技艺加以利用，而把“数学家”——占星术用法律加以禁止。著名数学史学家克莱因指出，数学的

"第一次灾殃是罗马人的来临，它们在数学史上的全部作用是一种破坏因素。"[①]

从文化的角度进行比较，古希腊的文化应当说远远高于古罗马的文化，但像历史上许多不同民族文化的冲撞一样，文化形态较高的民族往往在冲撞中被文化形态较低民族的武力所征服。古罗马征服古希腊，成吉思汗征服汉族，满族人主中原都是这方面的案例。罗素认为，"当罗马人最初与希腊人相接触的时候，他们就察觉到自己是比较野蛮的、粗鲁的。希腊人在许多方面要无比地优越于他们：在手工艺方面；在农业技术方面；在一个优秀的官吏所必须具备的各种知识方面；在谈话方面以及享受生活的艺术方面；在艺术、文学和哲学的各个方面。罗马人惟一优越的东西就是军事技术和社会团结力。……罗马人没有创造过任何的艺术形式，没有形成任何有创见的哲学体系，也没有做出过任何科学的发明。他们修筑过很好的道路，有过系统的法典以及有效率的军队。但除此外的一切，他们都惟希腊马首是瞻"。[②]

古罗马的统治使古希腊文化的理性精神和数学成果得不到发展。对此有的学者曾试图用"农耕型文化"与"城邦型文化"的差异给予解释[③]。现在看来这方面的研究还应当重视数学在一个民族文化中从原始数学走向它形成一个运演体系的历史过程。

在古罗马的统治下，古希腊的数学只以保留以往的

---

① 克莱因：《古今数学思想》，第一册，第203页，上海，上海科学技术出版社，1997。
② 罗素：《西方哲学史》，上卷，第351页，北京，商务印书馆，1986。
③ 陈一心："罗马人的'农耕型'文化与数学衰落"，载《自然辩证法通讯》，1987年，第六期。

著作和少数学者的状态存活着，但即使是这种存活状态在古罗马的后期也发生了危机。基督教的兴起，使古罗马的统治者由残酷的镇压，最终不得不转向认可并把它奉为古罗马的国教。基督教作为最初的神秘性宗教，再加之它刚刚由民间走向国教的宗教情感，使基督教在教义上、在行为上都排斥表现理性的古希腊数学，特别是，作为古希腊文化理性精神精髓的数学理念更被认为与基督教神意志至上的精神直接相违背。罗马统治者在公元392年下令拆毁希腊神庙，禁止人民信奉异教。基督教与不信奉基督教的"异教徒"之间不断发生流血冲突，而首当其冲的受害者就是古希腊文化的继承人和古希腊的数学家。亚历山大里亚最著名的数学家海帕西娅，她也是人类历史上第一位杰出的女数学家，在亚历山大里亚大街上被基督教徒残酷杀害。这样，古希腊数学从阿基米德开始的命运在海帕西娅这里就画上了句号。古希腊数学与古希腊文化的理性只能作为一粒文化的种子深深埋入地下，等待着重新出土的一天。

古希腊数学在亚历山大里亚被阿拉伯人征服之后，就离开它的本土进入了阿拉伯世界。这个游牧的阿拉伯半岛的民族，在完成从印度到西班牙、从北部非洲到南部意大利的伟大征战之后，在人类历史上逐渐创造出了一种新的阿拉伯文明。

阿拉伯的数学研究水平低于古希腊的数学研究水平，但是通过胜利的征战，阿拉伯人获得了古希腊的学者和手稿。阿拉伯人注重实用，他们在应用的意义上关注和研究古希腊的数学。虽然他们没有在数学上作出什么重

大贡献，但是他们在公元6世纪到公元13世纪之间的七八百年时间里保存了古希腊数学，容忍了数学的研究和发展，从而为古希腊数学转向欧洲提供了必要的桥梁。

在人类历史上，西方的文明在某种意义上可以看做是基督教的文明。因此当人们研究文艺复兴时期数学的发展时，就不能不讨论古希腊数学与基督教之间的关系。

首先，基督教神学作为古罗马帝国的国教曾对异教徒的古希腊学者和古希腊的文化产生了强烈的冲击，但是基督教神学具有的原始神秘性却与毕达哥拉斯的神秘主义思想以及柏拉图的用数学解释世界的唯心主义观念有着内在的联系。基督教源于希伯来文化，希伯来文化中的原始数学神秘主义十分浓重，具有“字数术”（因为腓尼基文字用字母表示数字，这样每一个由字母组成的字就有了与数的对应关系）的神秘特征的基督教神学有利用数学神秘性的内在要求。

其次，基督教作为一种宗教，除去信仰之外，还有一个解释、表述以及论证自身的文化需求。在这个过程中，它必须吸收现有的高于自身的文化。因此，在基督教的有关著述中，古希腊的哲学就成为他们可用的工具。基督教最伟大的神学家之一奥古斯丁就是一位柏拉图主义者，他运用新旧约全书中与柏拉图对话相吻合的部分来发挥自己的宗教观点。这也就是说，奥古斯丁从柏拉图那里找到了对基督教有利的形而上学的教义。[1]

第三，基督教为使日耳曼等其他民族改信基督教建

---

① 罗素：《西方哲学史》，上卷，第432页，北京，商务印书馆，1986。

立了许多学校，这些学校教人们学习圣书和经文；另外，为培养教会的神职人员，教会又逐步办起了比较高级的学校，这些学校里数学的内容很少但就其范围而言基本上是当年古希腊的四大学科：算术（纯数的科学），音乐（数的一个应用），几何（关于长度、面积、体积等问题），天文（关于运动中量的问题）。这些数学内容的来源当然只能是翻译和利用古希腊的数学知识，从而，这也就大大推动和促进了欧洲从拉丁文中获得古希腊的数学。

最后，最为重要的一点是，古希腊的数学不是作为应用于天文学的一种方法、不是作为历法的计算、也不是作为占卜的方术而存在的，古希腊数学是一种思维的形式，是一种认识、表现和解释世界万物的理性方式。对于古希腊数学在这个层面上的理解和运用，基督教神学花费了不少的时间，最终才在基督教神学最杰出的人物托马斯·阿奎那手中得到了完成。阿奎那取代原来的奥古斯丁教义中的柏拉图主义而把基督教与亚里士多德的理论结合了起来，他运用逻辑的方法把亚里士多德的哲学与基督教的理性精神融为一个新的基督教的哲学体系。阿奎那的著作《神学大全》为基督教神学给出了一个全面的全新解释，逻辑推演的三段论式和欧几里得《几何原本》式的结构体系使僵死、沉闷的基督教世界有了新的生命活力。理性在这里开始成为表述上帝行为的工具，神的学说要用数学的理性来论证。这一切使上帝走出了神秘的围幔，走向一个由数学理性建起的台前。

在基督教的经院哲学中，世界是由上帝设计的。现

在，当人们认识到理性可以理解和论证上帝的行为和意图时，作为理性的数学就自然而然地成为运用理性表现上帝设计宇宙、表现行为和意图的方式。这样，人们对上帝的信仰与对自然的探索就变成了一个共同的目的，即追求神的一种数学的理性设计。

在文艺复兴之前，人们终于看见了上帝与数学的对话：上帝按数学的方式设计了世界，从而，对理性的追求、对数学的研究也就是在接近上帝。这样，信仰和理性在古希腊文化复活的数学中就走到了一起。这一切不仅为文艺复兴创造了条件，同时也为基督教学者从宗教的信仰走向理性的反叛指明了路标。

具体地说，基督教各教会的学校在教学中对数学的应用，经院哲学家对来自古希腊手稿的翻译，十字军远征带来的与君士坦丁堡的学术交流，使欧洲有更多的机会了解古希腊的文化和数学。再加之在 12 世纪欧洲转道阿拉伯开始学习和运用中国的造纸术，这些都极大地推动了古希腊文化在欧洲的复活。可以说，古希腊文化作为一粒种子，终于开始有机会在文艺复兴的沃土中得以生根发芽。

文艺复兴是古希腊文化的一种复兴，是一个人文主义的批判运动。漫长的中世纪给人们带来的种种僵死的宗教枷锁，现在开始在古希腊理性的意义下重新接受人们的审视；中世纪所形成的教会权威，对世俗生活的种种限制，圣经是一切知识最终来源和最后裁决的主张，也都受到了古希腊文化理性至上精神的有力冲击。“文艺复兴通过复活希腊时代的知识，创造出一种精神气氛：

在这种气氛里可以再度有可能媲美希腊人的成就，而且个人之才也能在自从亚历山大时代以来就绝迹的自由状况下蓬勃生长。”[1]

随着古希腊文化在文艺复兴中的复活，古希腊的数学也开始引起人们广泛的兴趣和注意。古希腊的数学在文艺复兴时期并在几何学、代数学、三角学等几个方面得到了发展。“对于文艺复兴时期的知识分子，数学之所以受到重视尚有另一个理由。在文艺复兴这样的一个时期里，随着新的影响、知识和革命运动席卷欧洲，使人们对中世纪的文化和文明产生怀疑和不信任。知识分子们要为其知识的建立寻找新的、坚固的基础，而数学则提供了这样一个基础。在各种哲学纷纷瓦解，神学上的信念受人怀疑以及伦理道德变化无常的情况下，数学是惟一被大家公认的真理体系。数学基础是确定无疑的，它给人们在沼泽地上提供了一个稳妥的立足点；人们又把寻求真理的努力引向数学。”[2]

具体地说，文艺复兴时期的数学应当说有着双重的作用：一方面它作为数学规律的内在特征，随着人们对它的兴趣而发展自己的方法和理论；另一方面数学又通过自身来强化对世界的理解和解释形式。通过基督教神学与亚里士多德学说的结合，人们相信上帝在构造世界时已经把数学规律放在其中了，人们的任务就是发现自然现象背后的数学规律，而每一条隐藏于现象之后的自

---

① 罗素：《西方哲学史》，下卷，第17页，北京，商务印书馆，1986。
② 克莱因：《古今数学思想》，第一册，第251页，上海，上海科学技术出版社，1979。

然规律的发现又都可以被看成上帝存在及其智慧的明证。可以说，这种数学理性精神构成了文艺复兴时期全部科学活动的特殊背景。对此例如由“日心说”与“地心说”之争就可清楚地看出。

早在古希腊的毕达哥拉斯学派那里，由于圆被认为是完美无缺的，是和谐美好的表现，因此，在这一学派看来，天上的星体也必定采取圆周运动的形式，因为，不然的话，就降低了其“至高无上”的完美性。也正是基于这样的观念，古希腊就逐渐形成了以地球为中心，以太阳、月亮及其他星体的圆形轨迹为边际的球体式宇宙体系。由于这一以地球为中心的同心圆的宇宙体系在解释某些行星的运动轨迹和亮量变化时遇到了困难，因此，在公元2世纪克罗狄斯·托勒密又对这个体系进行了修改和细节的补充，他运用当时的数学知识使之真正成为了一个可以计算的数学体系。

托勒密在他的《至大论》中对自己的宇宙体系进行了详细的论述。他保留了早先的天球圈，但是，为了解释实际观察中出现的问题，他又增加了许多变化的圆圈：当一个行星的运动被实际观察表明它不符合绕地球作圆周运动的时候，这个行星就被看做是在一个称为本轮的圆圈上运动，而这个本轮的圆心则同时在绕地球的一个圆周——均轮——上运转。均轮绕地球作美好的圆周运动，本轮则又在均轮之上作圆周运动，这样，通过这种双重运动的引入，托勒密就既保住了天体的“完美性”，同时又可对具体观察中的各种现象、特别是行星运动的某些不规则性（如逆行）和距离变化的现象作出解释。

另外，为了对其他星体运动的一些不规则性作出解释，托勒密又把地球放在远离太阳的地方，并且使用了偏心圆和对心圆，后者被用来解释行星速度所呈现的变化——在这种情况下，在相等的时间周期里就可观察到相等的角度（顶点不在圆周上）变化。所有这些方法结合起来就形成了一个成熟的宇宙体系。由于托勒密的这一体系在相当准确的程度上解释并预测了天体的运动，因此，它就一直保持到了哥白尼的"日心说"提出的时候。

天文学中的巨人，在文艺复兴时期有极为重大影响的"日心说"创始人哥白尼于1473年出生于波兰的托伦城，18岁时进入克拉科夫大学学习数学与科学，1496年哥白尼到波托尼亚学习教堂法，在那里他也学习了毕达哥拉斯等一些古希腊学派的学说，他还研究了医学和天文学。1503年哥白尼在费拉拉取得教堂法规博士学位。其后哥白尼转向医学，在波兰时他把行医作为日常事务的一部分。1506年，哥白尼回家乡永久定居，在那里他参加了艾姆兰邦的某些治理工作，也就是在这时，哥白尼在工作之余进行了天文学的深入研究和观测，并最终提出了对文艺复兴乃至对人类文明进程都有重大影响的"日心说"。

"哥白尼体系的基本概念全部包括在《天体运行论》的第一卷中。从这里所指出的行星顺序中，我们也可以一眼就看到托勒密的强有力的影响。哥白尼的确不是因为自己做出天文观测而出名的，他所做出的天文观察数目极少，而且其准确性比不上他的某些前辈。哥白尼也没有使旧天文学大为简化。他仍然接受了托勒密的本轮

和均轮，而且他发现，就像以前的天文学家不能完全精确地把地球当作（宇宙的）中心一样，他也无法把太阳完全放在中心的位置。”①

可以这样说，哥白尼改造了托勒密的体系：太阳被放置在靠近宇宙的数学中心点的位置，它的周围环绕着行星，地球则被看做行星中的一个，它的均轮上跟随着月亮。对哥白尼来说，这个体系在数学上要比托勒密的体系更为简单、和谐（日心说用34个圆代替了地心说的77个圆去解释月球和6个已知行星的运动），另外，这个体系也给尊重的太阳一个显著的位置。

哥白尼在建立了“日心说”之后的30年才公开发表了自己的学说。哥白尼是虔诚的教徒，在《天体运行论》中写给教会的献辞里，他说他不情愿发表是因为怕外行人反对，因为天文学是一种数学家的专业，不是一般人所能理解的。

由于从实际观测的结果比较，当时的“日心说”并不比“地心说”的修正理论好多少，因此，“日心说”在开始时就没有能得到人们的普遍欢迎；另外，后一现象的出现还有一个更为重要的原因，即是由于日心说违背了基督教神学赋予人类和地球宇宙中心位置的观念。因此，从历史的角度看，我们就可以说，如果没有开普勒的工作，“日心说”的命运还要历经磨难。

开普勒（1571～1630）是一个命运坎坷的天文学天才，也是一位对神秘主义十分入迷并很有影响的占星术

---

① 埃伦·杜布斯：《文艺复兴时期的人与自然》，第10页，杭州，浙江人民出版社，1988。

大师。受毕达哥拉斯哲学的影响，开普勒虽然是一个虔诚的新教徒，但却有些异想天开地倾向太阳崇拜。这些动机当然使他对太阳中心说有所偏爱，他的毕达哥拉斯哲学也使他追随柏拉图的《蒂迈欧篇》，设想宇宙的意义必定寄托在五种正多面体上。

具体地说，开普勒曾用柏拉图的五种正多面体去寻求上帝按事先设计好的数学方案所构造的宇宙关系。他在《神秘的宇宙构造学》一书的序言中写道："我企图去证明上帝在创造宇宙并且调节宇宙的次序时，看到了从毕达哥拉斯和柏拉图时代起就为人们熟知的五种正多面体，他按照这些形体安排了天体的数目，它们的比例和它们运动间的关系。"虽然开普勒用五种正多面体去探索自然界的秘密没有成功，但是他在寻找宇宙和谐的数学关系方面获得了巨大的成功，他所提出的行星运动三大定律成为伟大的历史丰碑。

"日心说"的成功，是文艺复兴时期数学的巨大成就，这一成就同时也表明了数学作为一种信仰、作为一种解释世界的形式足以和基督教神学相抗衡。

具体地说，正如前面所已提及的，哥白尼和开普勒事实上都是虔诚的神学信徒，尽管他们移动了基督教神学中人是宇宙的中心和世界万物都绕地球运行这样一个基石，但他们的本意并不是要反叛基督教神学，恰恰相反，在他们的神学信仰中，上帝是按数学来构造世界和安排宇宙万物的，从而，他们所要作的就只是把太阳放在宇宙中心，并以数学的简洁理论来表现上帝的意志。事实上，古希腊毕达哥拉斯学派的哲学中就曾有过宇宙

中心是一团火，其他行星包括地球、太阳都绕它运转的构想。因此可以认为，对古希腊文化的崇敬以及坚信上帝按数学设计宇宙的信仰，使哥白尼和开普勒敢于用数学的理性、数学的方法、数学的构造表达自己有违一点神学教条的天文学。

文艺复兴对数学信仰的增强，也是“日心说”保卫自己抵抗反对意见的重要文化力量。既然基督教神学都相信上帝是按照数学来设计宇宙万物的，那么，给出简洁优美的数学理论来解释宇宙万物无疑就有潜在的巨大说服力。虔诚的基督教信徒，按照上帝的意志找到了上帝事先安排在万物之中的和谐、优美的数学规律，即使它稍微地违背了一点教义，也应当受到人们的赞美。

哥白尼、开普勒正是以这样的一种数学的理性、数学的信仰来反驳那些反对意见，捍卫自己的理论构想的。

正如哥白尼说他的“日心说”是一个数学理论一样，开始支持哥白尼学说的也都是一些相信宇宙万物是按照数学方式设计的数学家。换句话说，只有坚定的数学信仰和数学理性精神，才会在观测事实并不支持“日心说”的情况下，敢于脱离神学的教义和观测事实上的现象，坚决地相信“日心说”。

一般地说，文艺复兴时期的数学成果就其本身而言应当说并不十分辉煌，但是就数学与其他学科的结合，尤其是数学作为古希腊文化中理性精神的一种复归，其作用和影响却是十分巨大的。就后者而言，数学与绘画的关系即可被看成一个颇有代表性的典型。

早在古希腊文化中，由于毕达哥拉斯、柏拉图哲学

所提倡的数学理性精神，就使古希腊的艺术发展受到了数学的深刻影响，而作为形象表现形式的艺术一经注入数学的精神则更展现出了独特的魅力。

例如，数学所表现的美好、和谐使古希腊的艺术无论是雕刻还是绘画都表现出一种形态匀称、举止恬静、和谐安详的特点。在绘画艺术上，数学的理性更要求画家们按照数量关系结构来表现事物的特征。例如，古希腊绘画特别提倡按照毕达哥拉斯提出的“黄金律”来表现事物和人物的关系，因为，按照毕达哥拉斯的观点，所说的“黄金分割”（“神圣分割”）可以给人以一种特别的美感。由具体的考察可以看出，这一特定的审美标准在古希腊人那里得到了十分广泛的应用，如绘画中人体的比例、绘画材料的长与宽的比例，甚至身体中各个细小部分，都利用了“黄金分割”这一审美的数学要求。

从文艺复兴运动的历史进行考察，绘画与文艺复兴的发展有着十分重要的联系。如意大利的著名画家达·芬奇就是文艺复兴时期的一个重要代表人物，而数学的方法、数学的理性则又可以被看成推动达·芬奇走向艺术和事业顶峰的重要动力。

一般地说，文艺复兴时期的画家其共同特征即是努力脱离中世纪宗教绘画的狭隘主题，而把绘画的体裁转向人间；进而，这种由宗教的天国向人间的转变也使画家们开始深入地研究如何才能在画布上真实地再现人世间的各种场景。

古希腊文化的复兴，对古希腊著作的学习，使古希腊的数学理性精神深深地进入了文艺复兴时期各个艺术

家的心灵。数学被看成现实世界的本质，几何学则是现实世界的表现形式，从而，为了在画布上真实地表现人世间，画家们也必须遵守数学的形式和表现方法。这样，数学作为一种理性的精神就开始进入到了艺术家的形象思维之中。例如，达·芬奇把毕达哥拉斯的“神圣分割”定名为“黄金分割”，他还强调如何按“黄金分割”来绘制和欣赏人体美。

应当指明，数学进入绘画领域的另一原因还在于当时的大部分画家同时从事工程、建筑等方面的工作，这样的经历也就使他们比其他人更具有数学的知识。例如，达·芬奇就广泛地研究过力学、地理学、气象学、解剖学等方面的知识，特别是，作为在画布上再现世界的几何方法，达·芬奇和许多绘画大师都详细地研究了透视学。

具体地说，数学透视法的提出和发展，即应归功于文艺复兴时期的绘画大师们。他们面临着如何准确地把三维空间的现实世界表现在二维平面的画布上，这既是一个与绘画直接有关的问题，又是一个真实的数学问题。

在文艺复兴时期，第一个认真地把数学运用于绘画方面的艺术家是布鲁内利希（Brunelleschi 1377～1446），他读了欧几里得等许多古希腊数学家的数学著作，还研究光学，并利用几何学和光学去研究透视法。其后，阿尔贝蒂写于1435年的《绘画论》（1511年公开出版），提出了有关透视法的数学原则，这本书成为后来绘画艺术家运用透视法的基础理论。最后，文艺复兴时期把透视法的数学原理较为完整地表示出来的是画家弗朗西斯卡（Francesca 1410～1492），他的《透视绘画论》推进了阿

尔贝蒂提出的有关透视学的理论。弗朗西斯卡认为透视法是绘画艺术的科学基础，人们应当通过数学来修改和推广由经验获得的知识。他也被认为是那个时期最好的几何学家。

当时用于透视法的焦点透视法，事实上是几何知识和光学知识的一种结合。运用这一方法，艺术家们准确地解决了景物在画面中的大小比例关系：远处的物体在画面中较小，近处的物体在画面上则较大，这一切都可以用焦点透视系统中给出的数学方法作出科学的处理；另外，相应的基本原理又都建立在数学的严格演绎论证之上。从而，在绘画的焦点透视系统中绘画与数学就得到了完美的结合，而后者则又可以看成文艺复兴时期对古希腊文化中数学理性热切追求的一个直接结果。

就文艺复兴时期数学与艺术的结合而言，达·芬奇的绘画可以说最具有代表性。这位文艺复兴时期的巨人，不仅是一位画家，而且也是一个哲学家、工程师、雕塑家、建筑师和物理学家，他深入而广泛地学习了古希腊的文化，并对许多自然学科作过认真细致和深入的研究，在艺术上更留下了许多不朽之作。然而，就达·芬奇的评价而言，我们却不能把他的科学工作和艺术工作完全割裂开来，而应把两者看成一个有机的整体。特别是，就如马丁·约翰逊所指出的，我们应“把达·芬奇的艺术看做是一种内在的、科学思想的自我表现形式。”[1]

具体地说，通过对古希腊文化的研究以及在自然科

---

[1] 马丁·约翰逊：《艺术与科学思维》，第164页，北京，工人出版社，1988。

学方面的探索，达·芬奇很好地接受了古希腊的文化遗产，特别是，他不像文艺复兴时期其他的一些学者仅限于利用了古希腊的一些成果，而是深入到了古希腊文化的精髓之中，并通过从中吸取营养而使自己的绘画艺术成为散发出古希腊文化理性的一座丰碑。

达·芬奇对数学在绘画中的应用，尤其是有关透视法和比例的研究有独到的见解，他对人体结构比例的研究更为艺术创造提供了一种数学定量化的规范。例如，达·芬奇的绘画杰作《蒙娜丽莎》所表现出的“永恒的微笑”即是达·芬奇的透视法和比例研究的一个结晶。《蒙娜丽莎》的右手被誉为绘画史上最美的一只手；绘画中所运用的精确的比例和透视方法，使这只手更有体积感，更有重量，尤其是更富于生命力，即使与现代精巧的摄影相比也毫不逊色。再例如，达·芬奇的另一幅杰作《最后的晚餐》则充分表现了作者运用焦点透视所带来的艺术视点效果。耶稣与十二个门徒共进晚餐，达·芬奇的构图是使他们全部面向观众、一字排开，坐在正中的耶稣头部正好受到中间亮光的衬托，精心构思的光线效果使中心位置的耶稣成为整个画面的中心，耶稣的十二个门徒每三人一组对称地分布在耶稣的两侧。这幅作品画在米兰圣玛丽亚教堂餐厅的正面墙壁上，画面屋顶和墙壁的透视线与餐厅建筑的实际透视相衔接，使人感觉到耶稣正平静地说出那句惊人的话：“你们之中有一个人出卖了我。”以耶稣头部后面的一点为焦点，长长的画面构成了一个完整的焦点透视系统。透视学的方法在这里得到了准确的运用，画面把人物的情感、形态、心理准确地融

为一体，不仅表现了每个门徒的神态差异，而且十分集中地表现了耶稣身上的美和善与叛徒身上丑和恶的冲突、对比。

为了更清楚地说明问题，我们在此还可对中西绘画作一简单的比较。由具体的考察可以发现，中国的传统绘画没有古希腊那种遵从数学理性、数学方法的文化追求。例如，中国画中的人物、花鸟、山水都不受“黄金分割法”的影响；另外，更为重要的是，中国画中也缺乏对焦点透视的数学方法的追求。与此相反，中国画是散点透视：视点可以上下、左右移动。例如，长长的一幅《清明上河图》画卷，你可以看到画面上的人物比例相仿，无论远近只以作者的主观视觉为主。然而，散点透视的画面仍是众多人物神态各异，栩栩如生。

一般地说，中国画追求意在笔先，笔墨出自胸臆，充分表现画家自己的主观审美意愿，而根本不受任何数学方法的束缚。例如，中国唐代著名画家吴道子，每逢作画常舞剑尽酣，然后挥毫而就；中国泼墨画创始人王洽（约 734～805）每逢作画则必先喝得酩酊大醉，然后再泼墨作画。“凡欲画图障，先饮，醺醉之后，即以泼墨。或笑或吟，脚蹙手抹。或挥或扫，或淡或浓，随其形状，为山为石，为云为水，应手随意，倏若造化，图出云霞，染成风雨，宛若神巧，府观不见其墨污之迹，皆谓奇异也。”

作为绘画，作为艺术，中西绘画应当说各有其独特的审美意义；但是当我们把中西绘画的方法进行比较时，就可更为清楚地看到数学理性、数学方法在西方绘画中

所占据的重要地位。另外，当我们从文化深层的意义去体味西洋绘画法的数学内涵时，也就可以更好地去理解西方绘画从精确表现事物走向抽象表现事物的变化，因为，精确性和抽象性正是数学的基本特征之一，从而，西方绘画从精确的焦点透视法绘画走向抽象派画法的过程也就更为深刻地表明了数学及其理性对于西方文化和西方艺术的重要影响。

最后，应当指明，文艺复兴时期的数学主要地即是通过与其他学科的相互渗透得到发展的事实，显然也从又一角度清楚地表明了这样一点，即数学确实应被看成整个人类文化的一个有机组成成分。

第五章　西方文化中的微积分

微积分学的建立标志着数学由初等（常量）数学时期向变量数学时期的重要转变，在这一过程中，无穷小量及其运算占据了特别重要的地位。本章将从文化的角度对这一发展过程作出回顾和分析；另外，在第三节中，我们将从同样的角度对所谓的“数学危机”的内涵作出具体论述。

5.1　微积分的萌芽与其早期发展

在数学史上，微积分学的创立是自古希腊《几何原本》建立以来最伟大的成就，它是数学史上的一座高峰。虽然微积分是数学针对17世纪的科学问题给出的切实可用的数学方法，但是微积分中所涉及到的“无穷（小）”概念以及相关的某些思维方法，却早在古希腊的时候就被提出来过。

例如，在古希腊毕达哥拉斯学派提出“万物皆数”之后，原子论学派又提出了万物皆由原子构成的观念，

而这就直接涉及到了连续和离散、无限可分与不可分等问题。

其实，有关时间、空间和数量意义上的无限可分与不可分的问题，是人类认识相关的数量问题时必然会遇到的一些问题。例如，在中国历史上，庄子与惠施论及无限时就有"一尺之棰，日取其半，万世不竭"的论述。另外，古希腊关于无限可分与不可分的有关思辨，则可由厄里亚学派芝诺的四个悖论集中地看出。

芝诺悖论是这样的：[1]

第一个悖论，两分法悖论。这一悖论否定了运动的存在，其理由是："在你穿过一段距离之前，必先穿过这个距离的一半"。因此，如果认为空间是无限可分的，在任何一定的空间中就都有无穷多个点，而你不能在有限的时间内越过无穷多个点。

第二个悖论，阿基里斯悖论。动得最快的东西（古希腊的神行太保阿基里斯）永远追不上动得最慢的东西（乌龟）。因为"他首先必须到达乌龟的出发点，这时候乌龟会向前走了一段路。于是阿基里斯又必须赶上这一段路，而乌龟又会向前走了一段路。他总是愈追愈近，但始终追不上它。"与前一个悖论一样，这个悖论也假设了"空间是无限可分的"。

第三个悖论，飞矢不动悖论。"飞着的箭是静止的，因为，如果每一件东西在占据一个与它自身相等的空间时是静止的，而飞着的东西在任何一定的瞬间总是占据

---

① 北京大学哲学系外国哲学史教研室编译：《古希腊罗马哲学》，第57－58页，北京，商务印书馆，1961。

着一个与它自身相等的空间，那么它就不能动了。”这一悖论假设了“时间是由极微小的不可分的瞬间组成的”。

第四个悖论，游行队伍悖论。“一半的时间可以等于一倍的时间”。“假定有三列物体，其中的一列［A］，当其他二列［B，C］以相等的速度朝相反方向运动时是静止的（图2），在它们都走过同样的一段距离的时间中，B越过C列物体的数目，要比它越过A列中物体的数目多一倍（图3）。因此，它用来越过C列的时间要比它用来越过A列的时间长一倍。但是B和C用来走到A的位置的时间却是相等的。所以一倍的时间等于一半的时间。”

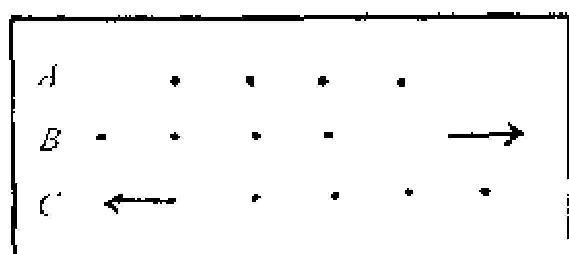


图2

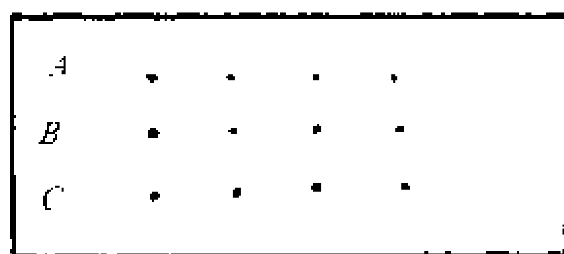


图3

对于芝诺所提出的悖论，古希腊有许多人曾试图给出解答，而这事实上也就是关于无限的思考与探索；另外，除芝诺悖论外，亚里士多德的无限观对古希腊人也曾产生过十分广泛的影响。具体地说，亚里士多德认为，无限只能是“潜在的”，而不可能是“实在的”，即真实的。亚里士多德之所以承认潜无限的可能性，主要是因为“如果说根本没有无限，显然许多说不通的结论就会

因而产生"。例如，时间就会有开始和终结，量也就不能分成更小的量，数也不会是无限的；但分割的过程显然永远不会告终，我们也可通过加上 1 而得到无限多个整数。但是，亚里士多德又强调指出，他所说的无限只是一个过程，即一个永远处于产生或灭亡之中的过程，而不是一个已产生的实体。这也就是说，无限只能是潜在的，而不可能是真实的。亚里士多德明确写道："只有潜能上的无限。……不会有现实的无限。"①

一般而言，古希腊人对于无限并不能说具有十分清楚的认识，对芝诺悖论更无法作出令人满意的解答，而后者则就集中地表明了当时对无限的认识缺乏严密的逻辑基础。显然，从这样的角度去分析，古希腊人在数学中对无限事实上采取了一种完全排斥的态度也就可以理解了。具体地说，为了解决与无限有关的问题，古希腊人采用了一种特殊的方法，这就是第四章中所已提及的"穷竭法"。

所谓"穷竭"，就其原始的涵义而言，是指在求取圆的面积时，人们可以相继地作出圆的各个内接正多边形，内接正多边形的边数越多，它也就越接近圆，而其面积就"穷竭"了圆的面积。当时希腊人并未使用"穷竭"这个名词，这只是 17 世纪的人们根据这一方法的含义所起的一个名称。穷竭法的创立应归功于欧多克斯，有的学者并认为这可能是古希腊柏拉图学派对于芝诺悖论的一种回答。

---

① 亚里士多德：《物理学》，第 85 页，北京，商务印书馆，1982。

《几何原本》中利用穷竭法证明了如下的命题：两圆面积之比等于其直径平方之比。

具体地说，欧几里得首先证明了圆可以被正多边形所"穷竭"，这就是说，在圆内可以作出一个正多边形，使其与圆的面积之差比任何给定的量还小。如图4，AB 为一内接正多边形的边，设 M 为弧 AB 的中点。因为三角形 AMB 的面积为四边形 $ARSB$ 的一半，因此就大于弓形 AMB 的一半；由此，当内接正多边形的边数增加一倍时，其所增加的面积就要超过圆与原正多边形面积之差的一半；这样，只需不断地双倍圆内接正多边形的边数，就可以使其与圆的面积之差小于任何给定的面积。

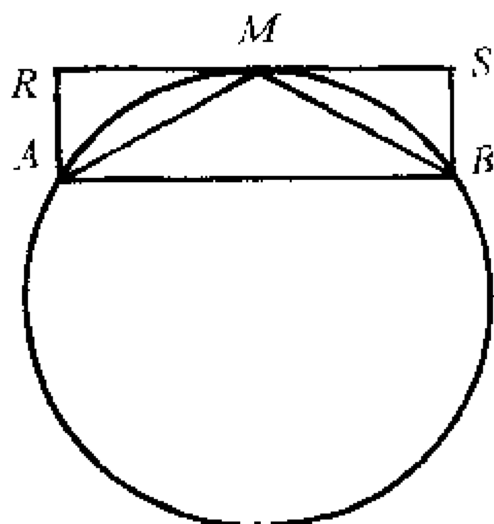


图4

其次，对于原命题可用反证法证明如下：

假定代替等式有：$S_1:S_2>d_1^2:d_2^2$（S_1、S_2 分别代表两个圆的面积，d_1、d_2 则为其直径）。

在第一个圆中，作一个内接正多边形，令其面积 P_1 与 S_1 之差如此小，使得

$P_1:S_2>d_1^2:d_2^2$，

令 P_2 为相似于 P_1 的在第二个圆中的内接正多边形的面积，于是根据相似正多边形的定理有：

$P_1:P_2=d_1^2:d_2^2$。

因此，$P_1:S_2>P_1:P_2$，也即 $P_2>S_2$，矛盾，因为正多边形的面积不可能超过其外接圆的面积。

同样地，我们也可证明不可能有：

$S_1 : S_2 < d_1^2 : d_2^2$。

这样原定理就得到了证明。

显然，尽管古希腊人在此避免了对无限的任何涉及，但却完全合乎逻辑地证明了现在用极限方法证明的结论。这就是穷竭法的根本意义所在。

在古希腊的亚历山大里亚时期，著名的数学家阿基米德把古希腊的几何学发展到了顶峰。阿基米德与古希腊其他数学家不同的是，他同时也具有科学实验的近代科学的特征，他并把这种实验方法与几何的研究成功地结合了起来。例如，阿基米德利用力学方法发现了不少面积计算公式，然后，作为一种严格的论证，他再用穷竭法对它们进行了证明。

对于上述的研究方法，阿基米德在一篇称为《方法》的论文中曾作了较为详细的说明。阿基米德的这一手稿是1906年在君士坦丁堡发现的，原稿抄写在一张羊皮纸上，后来因为抄写宗教经文曾被洗去，好在原文并未被完全洗尽，人们才能由此而得以了解阿基米德独特的一些思想方法，而后者事实上就可被看成在牛顿-莱布尼兹创建微积分之前在这一方向所迈出的一大步。

阿基米德方法的基本思想是：为了找所求的面积或体积，可以把它分成许多窄的平行的条或薄的平行的层，并且把这些片挂在杠杆的一端，利用杠杆的力的平衡原理，让它平衡于容积和重心实际已经知道的某一图形，这样我们就可由后者求得前者的面积或体积。另外，在获得了所说的结果之后，则又可以用穷竭法对此给出严

格的证明。

容易看出，阿基米德把一个量看成是由大量极微小的部分所组成的，这一思想与现代基于极限思想的求积分方法是十分相似的。从而，尽管在最终的证明中，阿基米德既没有引出无穷级数的概念，也没有运用极限的方法，而只是采用了上述的穷竭法，但他的上述思想无疑应当说体现了正确的前进方向。事实上，微积分的创立者也正是按照阿基米德所采取的方法一步一步地完成了这一数学历史发展中的伟大进程。

就微积分理论的早期萌芽而言，我们还应提及欧洲中世纪的经院哲学。对此著名数学史学家波耶曾指出："中世纪的贡献主要是从哲学的观点出发，来思辨地讨论无限、无限小和连续以及关于运动和可变性的新观点。这些著作对微积分方法和概念的发展起了并非不重要的作用。"[①] 因为，即如人们所熟知的，无限（小）、连续、运动、可变性等概念正是微积分理论中最为重要的一些概念。

然而，尽管存在有这些早期的工作，微积分理论却只是到了17世纪才最终得到了建立。这一事实即就有力地证明了这样一点：只有社会实践的需要才是决定数学发展最为重要的力量。

具体地说，17世纪促成微积分理论建立的实践问题主要有以下的四类：

第一类是研究物体运动时出现的问题，即已知物体

---

① 卡尔·波耶：《微积分概念史》，第100页，上海，上海人民出版社，1977

移动的距离表示为时间的函数公式，求物体在任意时刻的速度和加速度；反之，已知物体的加速度表示为时间的函数公式，求物体的速度和距离。

第二类是光学研究中出现的问题，此类问题在研究物体运行轨迹时也会遇到，即如何求取曲线的切线，显然，这已经不再是一个纯粹的数学（几何）问题。

第三类是在战争中火炮应用方面的问题。例如，由于炮弹的射程依赖于炮筒与地面的倾斜角度（发射角），因此，一个具体而又实际的问题就是要求得具有最远射程的发射角——从数学的角度看，这就是要求取函数的最大值（与最小值）。

第四类问题包括求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心等。尽管其中不少是从古希腊就开始的纯数学问题，但在17世纪又具有了应用的特征。另外，尽管穷竭法可以被用来解决较为简单的一些问题，但由于其缺乏一般性，因此就需要一种带有一般性特征的方法来解答此类问题。

就微积分的创建而言，许多数学家都作过一定的贡献，而所有这些工作的一个共同特征就是运用了所谓的“无穷小方法”。

例如，开普勒就是较早地运用无穷小方法的一位数学家和天文学家。在总结其著名的行星运动三大定律时，开普勒就曾采用类似“无穷小”划分弧长的方法；另外，在《测定酒桶体积的新方法》一书中，开普勒又论述了如何运用无穷小方法去求得旋转体（酒桶）的体积（有些结果是近似的）。

具体地说，开普勒的方法是把给定的立体划分成无穷多个无穷小的部分，即立体的“不可分量”，其大小和形状都便于求解给定的问题。例如，他把球看成是由无穷多个无穷小的棱锥所组成的，它们的顶点都在球心，底面在球的表面上，高等于球的半径 r。这样把这些棱锥的体积加起来，由棱锥的体积公式就可立即得出：

$$V = (1/3)rA = (1/3)r(4\pi r^2) = (4/3)\pi r^3,$$

其中 $A = 4\pi r^2$ 是球的表面面积。

用无穷多个无穷小元素之和来确定曲边面积和体积，是开普勒的无穷小方法的精华所在。开普勒认为他所获得的结果可以得到严格证明，所以他随心所欲地运用他的无穷小方法来计算各种各样的旋转体的体积和某些曲边图形的面积。当然，那个时候离给出严格的证明还有一段距离。不过这种自信支持和鼓励了开普勒。

另一位比较系统运用无穷小方法的是伽利略的学生、著名数学家卡瓦列利（1598～1647）。受开普勒和伽利略的影响，卡瓦列利把不可分量方面的一些思想发展成为一种几何方法，并出版了两部有影响的著作《不可分量的几何学》和《六道几何练习题》。

卡瓦列利的方法与开普勒的方法有些差异。第一，开普勒把几何图形分成无穷多个无穷小图形，然后再用某种特定的方法把这些图形加起来，从而求得原几何图形的面积或体积；与此不同，卡瓦列利则是先在两个给定几何图形的不可分微元之间建立起一一对应的关系，如果这两个图形与对应不可分量具有某种（不变的）比例，那么他就可以断定这两个图形的面积或体积也具有

同样的比例，这样，当其中一个图形的面积或体积事先已经知道时，另一个图形的面积或体积也就知道了。

（在此我们并可特别提及以下的“卡瓦列利原理”：

如果两个立体高度相等，任何两个分别与两底平行并且与两底距离相等的平面与两个立体相交所得的截面面积之比恒等于给定的比，那么，这两个立体的体积之比也等于给定的比。

容易看出，上述的思想也可被看成这一原理的直接基础。）

第二，开普勒认为几何图形是由同一维数的不可分量（无穷小的面积或体积）组成的，这可以从对几何图形连续分割直至最终得到不可分单元的过程想象出来；与此不同，卡瓦列利一般认为几何图形是由无穷多个较低维数的不可分量组成的，例如，他把面积看做是由平行的、等距离的线段组成的，把体积看成是由平行的、等距离的平面截面组成的。与中世纪的某些理论家相反，卡瓦列利并不关心不可分量的精确性质，而只是集中于如何运用不可分量去求得所需的结果。

与开普勒一样，卡瓦列利也未能对自己所得出的结果作出严格的证明，他有时候宣称他的方法是一种避免使用穷竭法的有实用价值的方法。也许正是这种实用性，使其在遭受批评的同时也被当时的数学家们广泛地加以利用。

在微积分的创立过程中，有关求极大值和极小值、求切线的问题也得到了许多数学家的关注。例如，著名数学家费尔玛（1601～1665）就是通过考虑函数在极值

附近的特性来解决极大、极小值问题的第一人。费尔玛有关切线问题的计算是在他的手稿《求最大值和最小值的方法》中发现的。费尔玛所应用的方法从本质上看就是今天的方法，其中缺乏的只是相应的极限理论。

费尔玛当时用以求切线的方法是这样的：如图5，设PT是曲线上一点P处的切线，TQ的长叫做次切线。显然，我们只需求得PQ的长度就可知道T的位置，进而就能作出TP。

假设QQ_1是TQ的增量，长度为E，由于$\triangle TQP \backsim \triangle PRT_1$，所以

$TQ : PQ = E : T_1R$。

由于T_1R与P_1R相差一个无穷小（费尔玛当时认为两者差不多长），因此就可替换：

$TQ : PQ = E : (P_1Q_1 - QP)$；

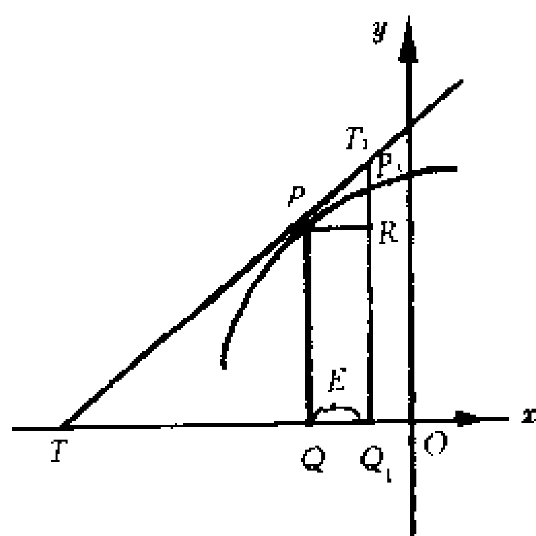


图5

由此即可得出

$TQ = (E \cdot PQ)/(P_1Q_1 - QP)$。

最后，用E去除这一分式的分子和分母，再去掉E项（实际上是让它等于0），我们就得到了TQ。

费尔玛当时没有明确要求E是“很小的”，也完全没有提到当$E \to 0$时取极限，但是费尔玛用他的切线方法解决了许多难题。从而可以说，这个当时表述得并不十分清楚的切线方法之所以能得到承认，主要就是由于它的实用性。

综上可见，就微积分理论的创立而言，似乎一切都准备好了，但似乎一切又都没有头绪，历史正等待着一位伟人来完成微积分创立的最后也是最伟大的一步历程。

5.2　牛顿和莱布尼兹的贡献及其影响

在微积分学的历史发展过程中，古希腊关于“无穷小”的论述及其所发展起来的穷竭法，可以看做微积分的萌芽，而文艺复兴、产业革命时期在力学、天文学、物理学、光学等许多领域提出的具体问题则实际促成了微积分的形成；与此同时，数学自身的发展也为牛顿和莱布尼兹最后登上微积分的顶峰作好了准备：在积分学方面，卡瓦列利、费尔玛和沃利斯等人为求取曲边形面积、曲面体体积等问题提供了与近代积分方法相似的内容；在微分学方面，费尔玛、巴罗等人已经从求曲线的切线、求函数的最大值中，提供了有关变化率计算的数学方法。

当时，对于微积分学而言，它在各种特殊情况的应用已经形成一些雏形，但还没有形成一个统一的理论体系。数学需要一种理论的构造，数学应当有一种理性的论述，这是自古希腊以来的数学和西方文化的要求。变化率概念的确立，各种特殊方法的一般化，解决微分与积分运算之间的互逆关系，把几何的方法表述成解析的方法，这些问题都等待着牛顿和莱布尼兹的最后努力。

牛顿（1642～1727）生于英格兰的一个农村家庭，在初等教育的学习中牛顿并没有显示出超人的才华。18岁时，牛顿进入剑桥大学三一学院学习。大学毕业之后，

牛顿成为巴罗的助手，但还没来得及展开工作，席卷英国的一场瘟疫使剑桥大学被迫停课，牛顿不得不回到家里。在那种乡间生活中，牛顿进行了光学、万有引力定律和微积分的研究，1665年至1667年之间的研究工作奠定了牛顿在科学史上千古流芳的巅峰地位。

1667年牛顿回到剑桥大学获得硕士学位，并且被选为三一学院研究员。两年之后，巴罗辞去教授席位，牛顿接替其位置并从此开始了他的大学教授生活。1687年牛顿的大作《自然哲学的数学原理》出版，这一著作给他带来巨大的声望。直到爱因斯坦创立相对论之前，牛顿创立的物理学理论体系一直是科学界的圭臬。比较而言，牛顿在自然科学中的成就要比数学成就大得多，但即使就后者而言，在数学史上与牛顿可以相提并论的数学家也寥寥无几。

在微积分的创立中，牛顿创立了流数的概念。他在1666年写的第一篇微积分论文《流数短论》中第一次明确提出了他的流数概念。作为牛顿创立微积分的重要标志是他的第二篇写于1669年的论文《运用无穷多项方程的分析学》。

首先，在《运用无穷多项方程的分析学》中，牛顿把变量的无穷小增量叫做“瞬”，并给出了特定的表示符号。其次，牛顿改变了在他之前巴罗等人先略去无穷小的高次幂、然后再除以无穷小量的作法，而代之为先除以无穷小量然后再略去含无穷小量的项——这也是现代运用和处理无穷小的方法。第三，牛顿在运算中运用了二项式的展开，从而使他的方法适用于更为广泛的函数。

第四，在前人用无穷多个微小面积和方法获得结果的地方，牛顿运用了面积的“瞬”时增量，然后运用逆过程——现代所谓的不定积分的方法求出面积。这种求瞬时变化率的一般方法，在求和（求积分）时候可以反过来应用的方法，可以看做微积分学实际上已经确立。在这篇论文中牛顿还给出了不定积分的运算性质、无穷级数、逐项积分等若干成果。

在牛顿的第二篇微积分代表作《流数法和无穷级数》中，牛顿对他的微积分思想方法给出了更广泛、更明确的说明。他给出了他的微积分学——流数法的完整表述，并系统地引进了自己独特的记法和概念；在具体方法上，牛顿给出求曲线的切线（导数的应用）、求函数的最大值和最小值、求曲线的曲率和求曲线的拐点等一系列方法，并用更清楚的形式论述了今天称之为微积分的基本定理。

在这篇论著中，牛顿认为变量是由点、线和面的连续运动产生的，因此把变量叫做流，变量的变化率叫做流数，对于流 x 和 y 的流数牛顿记为 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$，$\dot{x}$ 的流数记为 $\ddot{x}$，等等。牛顿认为如果瞬 $\circ$ 是“无穷小的时间间隔”，那么 $\dot{x}\circ$ 和 $\dot{y}\circ$ 就是 x 与 y 的无穷小增量，或者称为 x 和 y 的瞬。

例如，如果流量 $y = x^n$，为了求得 $\dot{y}$ 与 $\dot{x}$ 之间的联系，牛顿就建立

$$y + \dot{y}\circ = (x + \dot{x}\circ)^n$$

展开之后再减去 $y = x^n$，用 $\circ$ 除两边，略去所有含 $\circ$ 的项，就得到

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}。$$

牛顿在他后来的著作中开始改变无穷小量的提法，

因为这种无穷小使人们不得不在运算中略去那些含有瞬的项。为此牛顿引入了“最初比”和“最终比”的概念。在《自然哲学的数学原理》这一巨著中，牛顿解释道：“消失量的最终比严格地说并不是最终量的比，而是这些量无限减少时它们之比所趋近的极限，并且虽然它们能比任何给定的无论什么差值都接近于它，但在这些量无限减小之前，既不能超过也不能达到它。”[1]

综合上述，牛顿在微积分创立过程中对于流数的概念、微积分一般方法的形成、微分与积分之间的互逆运算都给出了明确的论述；但是在有关无穷小的论述中，尽管牛顿已提出了应把变化率看成增量之比的极限，但那些有关无穷小的论述并不十分清晰。这样，自古希腊以来就存在的那些问题就没有结束，而是留给了后来的数学家，同时也留给了基督教神学的那些认为上帝与数学同在的信徒们。

在微积分的创立中，与牛顿比肩的是莱布尼兹（1646－1716）。莱布尼兹是一位哲学家、法学家、历史学家、语言学家，同时在逻辑学、力学、光学和流体力学等方面也作出了重要的贡献，以至被称为“一个千古绝伦的大智者”。[2]

莱布尼兹早年并不懂数学，然而自1672年开始接触数学后，他就对微积分的问题十分感兴趣并开始了这方面的研究。莱布尼兹从1684年开始发表有关微积分的论文，但他在这方面的成果却是在1673年到1676年之间获

---

① 卡尔·波耶：《微积分概念史》，第210页，上海，上海人民出版社，1977
② 罗素：《西方哲学史》，下卷，第106页，北京，商务印书馆，1986。

得的。

也许是由于哲学家广泛深刻的思考，莱布尼兹对于数学形式、数学符号的设计十分敏感。他第一次把字母 S 拉长用以表示卡瓦列利的“不可分微元”之和，后来就有了像我们今天这样的符号 $\int xdx$、$\int ydy$。另外，1684 年莱布尼兹在他的第一篇微积分论文中，就引进了 dx 作为任意的有限区间，并且用比例

$$dy : dx = y : \text{次切距}$$

定义 dy。现在微积分中使用的许多基本法则都是莱布尼兹推导出来的。

就微积分的创立而言，除微积分基本原理之外，莱布尼兹还在如下几个方面作出了贡献：[①]

①函数和、差、积、商的微分法则；

②复合函数的微分法则；

③弧微分法则 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$；

④对数函数和指数函数的微分法则；

⑤在积分号下对参变量求微分的方法；

⑥曲线绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积公式

$$V = \pi\int y^2 dx;$$

⑦求切线、最大值、最小值和拐点的方法。

对微积分的发展，莱布尼兹虽然涉足较晚，但他的贡献绝不在牛顿之下，可谓旗鼓相当。他们都把微积分作为一种应用于一般函数的普通方法，他们都给出微积

---

① 袁晓明：《世界著名数学史家评传》，第 144 页，南京，江苏教育出版社，1990。

分中有关无穷小变化的明确表述并设计了特定的符号和记号，他们又都把计算面积、体积等求和问题归结到反微分，这不仅是求积分运算的简便方法，更重要的是建立起微分与积分的互逆关系。

另外，莱布尼兹虽然较晚进入数学领域，但对牛顿曾经研究过的各个领域，如微积分、变分法、微分方程、微分几何、函数概念、无穷级数等，也都加以研究，而且成果与牛顿相比并不逊色。但就数理逻辑的发展而言，莱布尼兹的贡献则远远超出了牛顿（可参见8．2节）。

莱布尼兹的晚年，与牛顿卷入了微积分发明权之争。事实是，就微积分的创立而言，牛顿与莱布尼兹都是独立创立者，只是牛顿发现的比较早，而莱布尼兹公布的比较早。现代的数学史学者一般把牛顿和莱布尼兹对微积分的贡献归结为如下几点：

①把原来散见于各种特殊问题的方法发展成一种可用于许多类函数的普通方法。使微积分构成了一门独立的学科，可用以处理广泛的问题，而不再是古希腊几何学中某种处理问题的特殊方法。

②在代数的意义上，建立起微积分的记号和运演方法，并在实际应用中可被用以处理许多不同的几何问题和物理问题。

③在微分与积分之间建立起一种互逆运算的关系，从而使当时由科学方面所提出的的四类问题，即速率、切线、最大值和最小值、求和等，都归结成微分和反微分。

④对微积分的基本概念进行了思考和论述。虽然无

穷小量、函数等概念在当时都不够明确，但是牛顿和莱布尼兹在这方面的先行思考为后来的进一步探索、包括批判性思考提供了必要的基础。

尽管牛顿和莱布尼兹的工作有很多共同点，但也存在有一些重要的不同之处。

具体地说，除去两者采用了不同的符号体系这一明显的不同之处以外，牛顿和莱布尼兹的差异更表现于他们的研究立场和研究风格。

首先，在微积分的创立过程中，牛顿更多地思考的是物理方面的问题，他以速度、流、瞬等具有明显物理背景的概念作为展开微积分理论的基础，并从考虑变化率出发来解决面积和体积的求和问题。与牛顿不同，莱布尼兹则多以哲学家的底蕴、从最终物质微粒（莱布尼兹称为单子）这一角度来思考面积和体积的求和问题。

特殊地，牛顿心目中的无穷小量，是一种可以变化的无穷缩小的量。这种无穷小量在表示变化时（即在物理的意义上）是存在的，但是在实际计算的最后结果中(即在数学的意义上)，它的存在是无意义的，因此可以弃舍。从而，总的来说，牛顿就是以运动为直观背景从事微积分学的研究，特别是，在所谓的“无穷小方法”遇到困难时，他更倾向于依靠运动直观来回避困难。这就正如著名微积分史学家波耶所指出的：“科学家牛顿，在速度观念中找到了在他看来很满意的基础。”[①]

与牛顿关于无穷小量的观念不同，莱布尼兹认为无

① 卡尔·波耶：《微积分概念史》，第226页，上海，上海人民出版社，1977。

穷小量是否存在的问题，与利用微积分运算法则对无穷小量进行计算是否导致正确的结果，是两个互相独立的问题。因此，对无穷小量就可把它看做“一些假想的对象，以便用来普遍进行简写和陈述。”莱布尼兹写道：“当我们读到无穷大量或无穷小量（即我们所知的最小的量）时，只要把无穷大量理解为要多大就有多大这样的无限制变大的量，把无穷小量理解为要多小就有多小这样无限地变小的量，因而任何可以指定的误差总能小于预先确定的量，这就完全可以了。又由于一般看来，当指定任何小的误差时，总能证明无穷小量会更小些，因此误差只能是零……如果有人想把这些（无穷大和无穷小）量理解为终极事物或真实无限，这也可以办到，而且也不必陷入关于广延，或一般地关于无限连续统以及关于无穷小的实质性争论，即使他认为这些事物完全是不可能的；为此只须简单地把无穷大量和无穷小量用作便于计算的工具，就像代数学家为了便利而使用虚根那样，因为无穷大量和无穷小量包含方便的计算工具，而在各种情况下它都能用已叙述的方法严格地、清楚地加以验证。”①

由此可见，与牛顿的经验主义倾向不同，莱布尼兹的微积分研究表现出了明显的哲学倾向。这也就如波耶所指出的：“牛顿试图用科学经验主义可接受的观念来回避极限观念，而莱布尼兹则受形而上学的观念主义的启示，依靠最终形式的观念。”② 这就是说，在莱布尼兹看

① 爱德华：《微积分发展史》，第358页，北京，北京出版社，1987。
② 卡尔·波耶：《微积分概念史》，第231页，上海，上海人民出版社，1977。

来，只要清楚地给出了适当的运算法则，并且把它们应用得十分恰当，那就一定会得到某种合理的、正确的结果，而根本无需顾及所使用符号的含义有多大的疑问。

也正因为此，在微积分的研究中牛顿和莱布尼兹表现出了完全不同的风格。这就即如克莱因所指出的："他们的工作方式也不相同。牛顿是经验的、具体的和谨慎的，而莱布尼兹是富于想象的、喜欢推广的而且是大胆的。莱布尼兹更关心的是用运算公式创造出广泛意义下的微积分，例如函数的积或商的微分法则，关于d^n（uv）（u和v都是x的函数）的法则，以及积分表。正是他，建立了微积分的规范，即法则和公式的系统。至于牛顿，即使他能容易地推广他的具体结果，他也没有费心去提出法则。"[①]

由于牛顿和莱布尼兹的影响，在他们之后很长的一段时间内，在微积分学（更为一般地说，就是分析学）的研究中形成了两个不同的学派，即由牛顿所开创的英国学派和由莱布尼兹所开创的大陆学派。

具体地说，在牛顿以后，英国的数学家们进一步发展了牛顿的经验主义倾向："英国数学家们紧紧抓住速度概念不放，可能是由于需要一个直观上易于接受的背景。"[②] 他们顽固地反对形式的研究方法并一味坚持几何的论证，甚至在很长的时间内拒绝使用莱布尼兹的更为方便的符号体系。与此相反，在欧洲大陆，莱布尼兹的

---

① 克莱因：《古今数学思想》，第二册，第93页，上海，上海科学技术出版社，1979。

② 卡尔·波耶：《微积分概念史》，第249页，上海，上海人民出版社，1977。

"形式化"倾向则得到了进一步的发展:"在欧拉和拉格朗日的大力培养下,一种非常成功的代数形式主义正在迅速地发展起来。"[①] 他们逐渐用更为有效的分析方法取代了原来的几何论证。例如,对于分析方法的重要性,拉格朗日在自己的《分析力学》中这样写道:"我们已经有了力学方面的各种专著,但是本书的计划是完全新的。我致力于将这门科学(力学)、以及解决与它有关的问题的技巧化归为一般性的公式,这些公式的简单推导就给出解决每一个问题所必须的全部方程……在这项工作中找不到图形。我在其中所阐明的方法,既不要求作图,也不要求几何的或力学的推理,而只是一些遵照一致而正规的程度的代数(分析)运算。"类似地,拉普拉斯也曾写道:"当一个人沉湎在分析运算中时,他就被这个方法的普遍性和它的不可估量的优越性引导着,这个优越性体现在它把力学推理转变成几何往往达不到的一些结果。分析是如此地多产,只需把一些特殊的真理译成这个普遍的语言,就会看到从它们本身的表达中又出现众多新的出乎预料的真理。……因此,这个世纪的几何学家被它的优越性慑服之后,马上致力于扩大它的领域,并把它的边界往后推。"[②]

英国学派和大陆学派在数学史上曾表现出长期的对立,但最终则以大陆学派的胜利而告结束。事实是,由于顽固地坚持与经验的直接联系,并以几何作为主要的

---

① 卡尔·波耶:《微积分概念史》,第322页,上海,上海人民出版社,1977。
② 克莱因:《古今数学思想》,第二册,第373页,上海,上海科学技术出版社,1979。

论证工具，英国在牛顿以后近一百年的时间内几乎完全被排斥在数学发展的主流之外。这就正如克莱因所指出的，在牛顿"死后差不多一百年中，英国人继续以几何为主要工具。而大陆的数学家继续莱布尼兹的分析法，使它发展并得到改善。这些事情的影响非常巨大，它不仅使英国的数学家落在后面，而且使数学损失了一些最有才能的人应可作出的贡献。"又"英国的数学家，……因为他们遵循牛顿的几何方法而受到损害。英国人专心致志于研究牛顿，……甚至在他们的分析工作中，他们用牛顿表示流数和流量的记号，而拒绝阅读任何用莱布尼兹的记号写的东西。……大约在1815年前后英国数学已奄奄一息了。"[1]

当然，历史的进步不可避免。"在19世纪的前四分之一的时期内，英国数学家开始对在大陆上迅猛发展的微积分及其扩展的工作感兴趣。……到1830年前后，英国人已经能够参加到大陆上的人的工作中去了。"[2] 就本书的论题而言，这一事实显然更为清楚地表明了数学传统对于各个数学家具体工作的重要影响。另外，也只有从这样的角度去分析，我们才能更好地理解微积分理论的建立对于数学历史发展的重要意义。这就是指，微积分的建立事实上意味着数学结束了先前作为"静态数学"的时期（"初等数学时期"）而进入了一个新的发展阶段——变量数学时期。对于这一发展我们可具体分析如下：

---

① 克莱因：《古今数学思想》，第二册，第383页，上海，上海科学技术出版社，1979。

② 同①。

第一，微积分的诞生结束了从古希腊以来几何学统治数学发展的历史。从第一次数学危机（这是由毕达哥拉斯关于“不可公度线段”的发现所引发的，可参见5.3节）开始，柏拉图用几何图形构造世界就促成了一种数学在本质上是以几何学为主导的发展趋势，《几何原本》的问世更使这一趋势得到了强化。然而，无穷小运算——微积分的出现和确立，已经清楚地表明了代数运演的优越性及其解决当时的科学问题的有效性和广泛性。作为发展主流的几何学现在只是无穷小计算遇到严密性问题时的一种解释和说明的形式，或者成为坐标几何走向代数思想的一种向导。当然，又如上面所已提及的，当时的数学家们还没有完全认识到所说的变化，特别是，对以牛顿为首的英国学派来说就更是这样的情况，而后者就使得英国的微积分研究长时间停留在几何形式中，从而大大落后于欧洲大陆的相应研究。

第二，微积分的确立改变了数学概念的来源。从古希腊开始，数学的对象都是来自直观、形象化的概念，有些虽然不是观念的直接提升但也有着直观的经验模型。特殊地，也就是这种直观化的数学概念，才使无理数的问世遇到了困难。但是，微积分中的概念却更多地带有思维创造的特征而并非直接立足于直观经验。例如，虽然变化率可以直接建立在物理学的经验之上，但无穷小、无穷大、微分、积分等概念的逐渐应用却已清楚地表明数学的概念也可来自思维的构造、而未必一定要依赖于直观。应当说，尽管人们对无穷小量的意义进行了长期的争论，但无论是积极还是消极，他们都逐渐接受了微

积分提供的思维意义上的概念和计算方法。

第三，微积分的创立以及微积分代数化的发展方向，不仅改变了以往以几何为主流的数学发展方向，更为重要的是无穷小的出现及其运算形式破坏了古希腊几何逻辑运演的严谨性和完美性。事实上，穷竭法之所以被古希腊的数学家所偏爱，主要的原因就在于它保持了数学完美的论证逻辑性，并把带有思辨形式的无穷小赶出了逻辑演绎的过程。可是现在，微积分中的无穷小运算，既不能说在概念上十分清楚，在运算中则又采取了"前用后舍"的不合传统经典数学的作法，这就使人们不得不重新考虑这样的问题，即究竟什么是数学的基础和数学的理论依据。对于数学的这一变化当时的数学家们已是模糊地意识到了，但要真正作出回答却是 100 年之后的事情了。

5.3　无穷小运算与第二次数学危机

对于无穷小量所带来的数学本身非逻辑非严密性的问题，那些曾具体从事微积分研究的数学家们早就有过这样或那样的思考，在他们之间并展开过热烈的讨论和争论。从数学的角度看，如何较好地解决这一问题或许可以被看成一个纯技术性的问题；但是，从文化的角度看，我们又只有从更为广泛的角度去进行考察，特别是密切联系当时在欧洲人生活中占有重要地位的基督教文化，才能更好地理解围绕无穷小运算所展开的激烈争论及其内涵。

当然，我们在此也可清楚地看到已有的数学传统的

影响。具体地说，正如前面所已指出的，经过文艺复兴所逐渐形成的西方数学观念主要渊源于古希腊文化，而逻辑的严密性则更被置于至高无上的地位；但是，微积分学中对于无穷小量的“自由”应用在当时却完全建立在实用方面的有效性之上，从而，这就必然会使得深受传统影响的数学家们感到极大的困惑和不安。例如，正是从这样的立场出发，一些数学家〔荷兰物理学家和几何学家纽汶提（B. Nieuwentijdt 1654～1718）可以看成这方面的一个主要代表〕很早就对这种改变了以往数学清晰准确逻辑方式的无穷小运算提出了尖锐的批评。

除去这种主要源自数学内部的考虑以外，围绕无穷小运算所展开的争论还有着更为广泛的意义，特别是，我们在此并可看到科学与上帝的一次较量。

具体地说，数学在欧洲自托玛斯·阿奎那以来在很长时期内一直被看成基督教神学的一个部分，而且，更为重要的是，与毕达哥拉斯－柏拉图的传统不同，这种基督教神学中的数学是确定的，即不带有那种神秘色彩的不确定性。尽管这种基督教神学曾接受了地心说的冲击，但是，由于开普勒的行星运动三大定律仍可被视为清楚地表明了上帝用以构造世界的数学规律的优美与和谐，因此，这就没有对上述关于上帝是以确定的数学形式构造世界的基督教神学观念造成任何实质性的改变。与此相对照，当无穷小运算作为解决某些特殊问题的数学方法得到发展时，它还只是数学家运算和推理的一种技巧；然而，当其经过牛顿和莱布尼兹的努力成为了一种新的数学理论和方法，这就不再只是一种技巧了，其所固有

的模糊性和不确定性也就必然会超出数学界的范围而引发关于上帝运用数学表现世界、安排秩序的形式的一场争论。这就是指，如果上帝是用数学的方式、方法来设计世界的，那就不可能、也不应当有任何不确定的东西；但如果无穷小也可被视为表现世界的一种形式，那么，我们又应如何去理解上帝的全智和全能呢？

这样，一场源自数学内部的关于理论和方法的争论最终就演化成了基督教哲学对微积分无穷小运算的一个批判运动。高扬这种批判大旗的代表人物就是著名的神学家、哲学家贝克莱（Berkeley 1685～1753）。

具体地说，贝克莱认为数学中的无穷小运算违背了基督教的教义，而数学的这种错误是宗教哲学所不能容忍的，因此，作为一个主教他就有义务维护教义的尊严，指明无穷小运算的错误，并最终消除错误的无穷小概念及其运算方法对宗教所造成的不良影响。

贝克莱作为一个博学的神学家，他的数学修养使他准确地抓住了当时的微积分理论概念不清晰、运算缺乏严密逻辑基础的弊病。贝克莱在1734年发表了他的论著《分析学者——致一个不信教的数学家》。在这一论著中，贝克莱首先指出，微积分的运算没有严格地按照逻辑演绎的方式进行，其所使用的是归纳的方法而且明显缺乏逻辑的依据。例如，针对牛顿在无穷小运算中所使用的方法，贝克莱指出：先给 x 一个增量，然后又让它是零，这实际上已在逻辑上违反了背反律，由这样所得的流数事实上是（0/0）。贝克莱还指出导数作为 y 与 x 消失了的增量之比，即 dy 与 dx 之比，“既不是有限量也不是无

穷小量，但又不是无”，从而就只不过是“消失了的量的鬼魂”，即是完全无法理解的。贝克莱写道：“设想一个量为无穷小，也就是设想它比任何一个可以感知的或者可以想象的量还要无限地小，或者说比任何最小的有限量还要无限小，我承认我做不到这一点。可是，微分学方法正是为此而发展起来的，并且以计算流数为目的。在微分学中，我们的现代分析工作者所要考虑的不仅仅是有限量的差分，还要考虑差分的差分，差分的差分的差分，以至无穷。也就是说，他们要考虑比最小的可察觉的量还要无穷小的量，比这些无穷小量还要无穷小的另一些量，以及比这些新的无穷小量更无穷小的另一些量，如此等等，永无终结。”贝克莱挖苦道：“我想，能消化二阶和三阶流数的人，是不会吞食了神学论点就要呕吐的。”

除去无穷小概念在逻辑和理解上的困难外，贝克莱还认为微积分的基本运算事实上用到了一些矛盾的假设，而又只是由于错误的互相补偿才得到了正确的结果。例如，贝克莱批评求导数的做法，即首先假设 x 的无限小增量瞬“∘”不等于零，然后作：

$$(x+\circ)^n - x^n = nx^{n-1}\circ + (1/2)n(n-1)x^{n-2}\circ^2 + \cdots$$

再将等式两边除以∘，然后令∘等于零，于是得到导数 nx^{n-1}。

贝克莱指出：“到此为止，我始终假设 x 在流动，x 具有真正的增量，而代表某个不等于零的量。我所做的一切都依赖于这个假设，否则就将寸步难行。正是从这个假设出发，我得到了 x^n 的增量，并且能够把它同 x 的

增量进行比较，求出这两个增量之比。但是对不起，现在我得作同第一个假设相反的新假设，即假设 x 没有增量，或者说o等于零。第二个假设破坏了我的第一个假设，并与其相矛盾，因而也与必须以第一个假设为条件的任何结果相矛盾。很抱歉，尽管如此，我还是要求保留，虽然它是基于我的第一个假设而得到的表达式，必须以这样的假设为先决条件，没有这样的假设就不能得到。这样的论证看来矛盾百出，上帝是不允许的。”①

应当说，在数学逻辑演绎和概念的清晰准确方面，贝克莱准确地击中了当时的无穷小运算的要害；但贝克莱不是数学家，他也不是从数学意义上来批判微积分的。在贝克莱看来，这种矛盾百出、概念不清的数学方法是对上帝的挑战，基督教神学对此不能视而不见，上帝必须对微积分说不。

在对无穷小运算进行数学意义上的批判之后，贝克莱又从更高的哲学层次对当时的微积分理论进行了否定。他认为关于无限所发展出的概念都是“奇特的”，而且，“要想象任何积极的数量或广延部分，在无限重复之后，都不等于最小可见的广延，那是很荒谬的。”贝克莱认为，这种通过拆毁几何学的基础而建立起来的微积分学说，“实则只是建立一套空中楼阁。但是我们可以答复说，按照我们的学说讲来，几何中有用的地方，有益人生的地方，自是一样稳固不可动摇的。我们若从实践方面着想，则那个科学只能从我们的说法中得到利益，绝

① 爱德华：《微积分发展史》，第400～402页，北京，北京出版社，1987。

不会蒙受不利。"①

显然，贝克莱认为微积分作为一种数学理论违背了几何学的数学原理，而后者恰恰是基督教哲学展开自己表述世界的一种理性依据。也正是在这样的意义上，可以看出微积分存在的问题实质上就是基督教哲学中存在的问题：微积分概念不清楚，缺乏严密的逻辑基础，事实上就是基督教哲学中数学概念的不清楚性以及数学表达世界秩序的非逻辑性。

综上可见，微积分作为一种新的数学方法，如果它的有关争论只局限于数学家的群体之中，那就是一个纯粹的学术问题，一代解决不了可以留给下一代去解决（事实是，正如2.2节中所已提及的，经过一百多年的努力，数学家们已为微积分理论奠定了严密的逻辑基础，这就是建立在实数理论之上的极限理论）。例如，数学史上的费尔玛猜想、哥德巴赫猜想等一系列数学问题就都是这样的纯数学问题。但是，微积分不一样，它已经越出了数学的数量计算的层面，进入到一个宗教和哲学的层面，进而在整个西方文化的核心层面（指对整个文化系统产生重大影响的非技术应用的思想意识层面）引起了争论。微积分学说与上帝的对立，使整个西方的宗教、哲学界都积极参与到这场表面上是数学、实质上则是文化的争论中来。

作为上述结论的一个论据，我们在此还可特别提及以下的事实，即作为马克思主义的创始人，马克思本人

---

① 贝克莱：《人类知识原理》，第81－82页，北京，商务印书馆，1973。

也曾直接参与有关微积分问题的争论。具体地说，马克思曾认真地思考和讨论过有关无穷小的方法及逻辑形式，并认为当时的无穷小运算事实上是一种"神秘的演算"，马克思还以 $y=x^2$ 为例说明，在无穷小的运算中，"这个数学上的正确结果，是基于在数学上根本错误的假设……人们自己相信了新发现的算法的神秘性。这种算法通过肯定是不正确的数学途径得出了正确的（尤其在几何应用上是惊人的）结果。"[1] 对于马克思的上述批评和他自己关于无穷小方法的解释，以及马克思本人所设计的某些无穷小方法，在此我们将不予以具体讨论和分析，与此相反，我们在此愿意特别指明这样一点，即马克思作为与贝克莱相对立的一位哲人，作为一名负有极强历史责任感和使命感的伟人，居然也积极、主动、自觉地参与有关微积分的数学论争。这一现象显然表明，西方文化中数学作为一种理性、作为一种宗教或哲学解释世界的形式有着何等的重要性！特殊地，当数学与传统文化出现矛盾时又会产生多么大的震动，以至作为红衣主教的贝克莱和作为马克思主义学说创始人的马克思都积极地投入到了相关的争论之中。

也正是在文化的意义上，我们可以更好地理解数学史上所谓的"第二次数学危机"。

一般地说，数学史中所谓的危机即是指在数学的发展中，新的概念、新的方法的出现，与原来有关数学的解释、理解产生了矛盾：新的概念与方法已经无法用现

---

[1] 马克思：《数学手稿》，第88页，北京，人民出版社，1975。

存的数学体系给予解释和说明，因而产生了危机。例如，数学史上所谓的"第一次数学危机"，就是指由于无理数无法用毕达哥拉斯学派有关（整）数的理论给予解释和理解所造成的危机；另外，这里所说的"第二次数学危机"，则就是指由于无穷小概念及相关运算无法用已有的数学理论给予解释和理解从而造成的危机。

但是，由先前的论述可以看出，以上关于数学危机的说法事实上只是表明了数学危机的一部分内容，而没有能揭示数学危机的另一重要内涵。这就是指，西方的数学危机并不仅仅是数学内部在概念和方法层面上的危机，而且也是一般的文化传统对于新的数学理论在认同和理解方面的危机。

例如，就只有从毕达哥拉斯学派关于"万物皆数"的宗教观或哲学观来进行分析（可参见4.1节），我们才能很好理解无理数（不可公度线段）的发现在当时何以会引起如此之大的困惑和不安，因为，按照毕达哥拉斯学派"万物皆数"的观点，我们可以用（整）数的理论解释世界、表达自然界的内在本质，然而，无理数的发现却造成了灾难——他们的学说在解释世界时出现了无法克服的困难。

从而，在这样的意义上，我们就可以说，"第一次数学危机"是古希腊文化所特有的一个现象：古希腊文化在毕达哥拉斯学派所处的时代，就有一种对自然界的探索和思考，并且那些先哲们也认为世界是可以理解、是可以用思想来掌握的，毕达哥拉斯学派正是这一文化传统中数学解释世界的创造者，只不过他们把这种对世界

的理解和描述完全归结于数学，并由此而造成了数学理解世界的危机。这也就是说，数学的“第一次危机”即是数学作为一种理性观念、作为一种解释世界的基本形式和方法所遇到的困难与危机。

作为一个论据，我们在此还可特别提及以下的事实：古巴比伦早已发现了毕达哥拉斯定理（直角三角形斜边的平方等于两直角边的平方和），但是古巴比伦并没有发生什么数学危机；同样地，中国古代也早就发现了开平方的问题和勾股定理，但也没有产生什么无理数的危机。显然，这些史实表明：古希腊无理数的危机确实不是数学计量意义上的一次危机，而是一种在数学层面发生的文化危机。

类似地，对以上所说的“第二次数学危机”我们也可作出同样的分析。这就是说，这也并非一次纯粹数学意义上的危机，恰恰相反，只有当基督教文化接受了亚里士多德的数学理性精神，并以此来解释世界时，无穷小概念的不确定性、模糊性以及相关运算中的非逻辑性，才会与神学中上帝用数学方式构造世界安排万物的解释形式发生直接的矛盾，从而也才会引发又一次危机，而这事实上就是一种在数学层面发生的文化危机。

基于以上的分析，我们就可以说，仅有数学内部概念与方法的矛盾是形成不了危机的。例如，就西方文化而言，笛卡尔创立的解析几何无疑也可说是一种新概念、新方法，他在处理问题时也会用这样那样的方法，但由于这些与西方文化并没有什么直接的冲突，更没有构成对基督教神学的直接威胁，因此，解析几何的概念及方

法就作为一种新的数学方法被顺利地接受了。

进而，以上的论述显然也就更为清楚地表明了西方的数学与文化之间存在有一种特殊的关系。从文化的角度分析，西方数学从古希腊开始就具有双重的功能，其一是技术层面的应用性功能，其二则是文化层面宗教或哲学意义的解释性功能。对于西方数学与文化的这种特殊关系，著名的数学家、哲学家罗素看得比较清楚。他指出："与启示的宗教相对立的理性主义的宗教，自从毕达哥拉斯之后，尤其是柏拉图之后，一直是完全被数学和数学方法支配着的。数与神学的结合开始于毕达哥拉斯，它代表了希腊的、中世纪的以及直迄康德为止的近代的宗教哲学的特征。"[①]

最后，作为一种横向的比较，我们可以发现，中国古代数学和印度古代数学在其文化体系中都只具有技术层面的应用功能，而没有文化层面的解释功能。从而，在这两种文化传统中，数学中所出现的问题就永远只是技术层面上的问题，而不会对其文化解释系统产生什么影响（中国文化的解释形式是《周易》和阴阳五行构成的解释系统，在印度则是由宗教构成的解释系统），从而也就不会造成任何危机。例如，中国与印度都创造并毫无反响地接受了无理数。对于中国文化来说，开方中出现开不尽的数只是一种运算的结果，而不会对宇宙万物的解释形式产生什么影响。例如，《九章算术》的开方术说："若开之不尽者，为不可开，当以面命之。"这就是

① 罗素：《西方哲学史》，上卷，第64页，北京，商务印书馆，1986。

说，对开不尽的数可以“以面命之”，如此而已。这样，无理数就自然而然地出现并被接受了。类似地，中国古代数学中有关无穷小的思考也可与哲学层面的思考毫不相干而不产生矛盾。如庄子与惠施论及无限小时就曾提出“一尺之棰，日取其半，万世不竭”；而数学家刘徽在割圆术中用到无限小时则认为“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。”这种对无限完全相反的理解和认识在中国古代数学中毫无反应，当然也就不会有什么数学危机可言。

最后，应当提及的是，除去19世纪发展起来的严格的极限理论以外，由美国逻辑学家鲁宾逊（A. Robinson 1918～1974）在20世纪60年代所建立的非标准分析可以说最终为17世纪直观的无穷小理论奠定了严密的逻辑基础。当年牛顿和莱布尼兹所受到的责难现在都可以解脱了。不过无论非标准分析的数学意义如何，它都不会产生和引起当时西方文化对数学的那种热情，因为，今天的人们已不再把数学看成宇宙秩序的先天表现形式；同样地，无论多么怪诞的数学概念，无论多么奇特的数学运算方式，在今天也只会引起人们的鉴赏和关注，而不会再造成像微积分那样的带有文化意义的数学危机。

第六章　非欧几何的历史发展

非欧几何的建立可以被看成数学现代发展的实际起点。这一章将首先对非欧几何的历史形成过程进行回顾，然后，再从文化的角度对这一过程作出分析和思考，并具体地指明非欧几何建立的数学意义和文化意义。

6.1　第五公设的历史研究

《几何原本》作为古希腊数学的一种总结性再创造，作为欧几里得精心雕琢的数学模式，成为古希腊文化中的一块瑰宝，尤其是，它以五种正多面体的逻辑论证作为全书的终结，使其与柏拉图的哲学有机地联系到了一起。但是，无论是把欧氏几何作为一种哲学的表现，还是把它作为一种基督教神学的教义理性，欧氏几何中有关第五公设的论述总是让人感到有某些不尽人意的遗憾。

正如第四章中所已提及的，《几何原本》开卷有23个定义、5个公设、5个公理，其中的第五公设是：同一平面内一条直线和另外两条直线相交，若在某一侧的两个

内角的和小于两直角，则这两条直线经适当延长后在这一侧相交。

与《几何原本》中其余的公设与公理相比，第五公设显得语言叙述冗长，与公设、公理应有的明显、直观性和不证自明的真理程度似乎有些差别。

特别是，在第五公设的叙述中还隐含有直线可以无限延长的涵义，由于古希腊人在数学中对无限基本上采取了一种完全排斥的态度，因此这也就引起了人们的关注和不安。

对于第五公设的应用，似乎欧几里得本人也有所犹豫，因为在《几何原本》中，只要可以不用第五公设，在相关的证明中欧几里得都避免使用它。由此可见，欧几里得本人对第五公设的提出也就不像其他公设、公理那样理直气壮。

出于对柏拉图哲学的领悟，或是出于对欧氏几何体系的爱护，再加上后来对神学宗教的信仰，人们一直都希望能对欧几里得的第五公设作出新的叙述或能对它进行证明从而将其从公设中去掉。在从公元前 300 年到公元 1800 年的这两千多年的时间里，几乎所有有作为的数学家、神学家都在第五公设上投入了大量的精力：哲学家、神学家希望能由此进一步完善欧氏几何的理想化地位，数学家则希望能使几何的逻辑演绎体系更加完美。

总的来说，对第五公设的研究可以归为两大类，其一是试图找到更为自明的公设或命题来代替第五公设；其二则是试图从其他公设、公理推证出第五公设，从而使它成为一个定理。

对第五公设的第一个最有影响的证明是由古希腊的托勒密（90～168）给出的，他试图用欧几里得其余的公设、公理以及与第五公设无关的定理来证明这一公设。由于其证明的过程中已经假定了有关两直线平行的内容，因此这一证明事实上是无效的。但这至少告诉我们这样一点，即在古希腊的时代第五公设就已引起人们的注意和怀疑。

公元5世纪著名的古希腊数学评论家普罗克拉斯（410～485）在对古希腊数学进行评论时也认为第五公设应当从几何的公设、公理之中去掉，因为它是一个包含有许多困难的命题。普罗克拉斯提出，一条直线与两条直线相交，在内角之和小于两直角的一侧两直线相交，这个结论并不很清楚，因为两条直线也可能渐近而不相交。例如，双曲线与它的渐近线就逐渐接近但不相交。普罗克拉斯也给出了关于第五公设的一个证明，但他提出的公设实际上只是第五公设的一个不同叙述的替代物，即与第五公设是完全等价的。

证明第五公设的努力在历史上一直持续不断地进行着，但却都是一无所获。许多数学家在证明第五公设的过程中不自觉地运用或假定了某个与第五公设等价的命题。这也就是说，这些努力的最终结果事实上只是给出了第五公设的某些替代公理或公设。

例如，英国数学家、曾在微积分创立方面为牛顿开辟过道路的沃利斯（1616～1703），是当时最有能力、最有创造力的一位数学家，他也曾对第五公设进行了深入研究。通过研究历史上对这一公设的种种证明，沃利斯

给出了自己关于第五公设的一个证明。但这事实上也只是给出了与第五公设等价的一个命题：任给一个三角形，存在另一三角形与此相似，这两个三角形的边长之比可等于任意给定的值。

另外，曾在椭圆积分方面作出过极有影响的权威性工作的数学家勒让德（1752～1833）对第五公设问题也十分感兴趣。他经过大约二十年的长期研究最后同样获得了一个与第五公设等价的命题。这就是指，如果任何一个三角形的内角之和为两直角，则第五公设成立；而由早期的几何研究人们早已知道，这一命题的逆命题也是成立的。

总的来说，在长达两千多年的时间中数学家始终希望能对第五公设进行证明；但是，尽管不同的数学家使用了不同的方法，结果却都没有能获得成功。有不少数学家曾高兴地宣布自己已经成功地找到一种新的证明方法，但所有这些证明后来都被发现无一例外地存在问题：在这些所谓“成功”的证明中都或明或暗、或自觉或不自觉地应用了与第五公设等价的公理。从而，这样的证明就不能被看成真正的证明。但是，通过这些失败的努力，人们获得了一些极有价值的与第五公设相等价的命题。即如

每一个三角形的内角和都相等；

通过一角内任一点可以作与此角两边相交的直线；

四边形的内角之和等于四个直角；

垂直于锐角的一条边的直线，必与此锐角的另一条边相交；

在一个平面中，过已知直线外的一点只能引出一条直线与已知直线相平行（由于这一等价命题流传较广，因此，人们通常就把第五公设称为"平行公理"）；

……　　……

两千多年的失败历史无疑会促使人们对这种证明的方法和目的等作出一定的反思，特别是，由于正面的努力始终未能获得成功，因此，一些数学家就开始了反面的努力，即是希望能从相反的规定引出矛盾而用反证法证明第五公设。

从历史的角度看，在后一方向上试图证明第五公设的应首推数学家萨开里（Saccheri 1667～1733），他设想如果在假设第五公设不成立的情况下能导出矛盾，则就等于证明了第五公设。萨开里经过艰苦和复杂的论证，发表了《排除任何谬误的欧几里得》一书。在此书中，萨开里认为他已经在第五公设不成立的情况下找到了矛盾，从而就改善了《几何原本》的基础。但是，萨开里的证明存在有一个逻辑的错误，即是把有限图形的性质在没有理论证明的情况下任意地推广到了无限图形，从而就是犯了范畴混淆的错误。

萨开里对第五公设在相反方向上的证明虽然没有成功，但这却不仅指明了一个新的努力方向，而且，从实际结果来看，这并是对于欧氏几何的一种超越，因为萨开里在证明中所推导出来的一些命题事实上已经不再属于欧氏几何、而是属于非欧几何（罗巴切夫斯基几何）的范围。遗憾的是，尽管萨开里已经站到了非欧几何的大门口，但却没有能认识到创造一种新的几何学的可能

性。

德国柏林科学院的兰伯特（Lambert 1728～1777）采用了与萨开里相似的反证法来证明平行公设。在1786年出版的著作《平行线理论》一书中（写于1766年），兰伯特给出一个有三个内角为直角的四边形，然后分别对第四个角是锐角和钝角的情况进行了讨论。兰伯特在这一研究中开始认识到，如果一组假设不导致矛盾，就一定能获得一种逻辑体系。但是由于兰伯特还没有所谓几何"模型"的想法，因此他还无法理解这种逻辑体系可以构成一种新的几何学。总的来说，兰伯特意识到了至少存在有一种没有第五公设的"逻辑世界"。这种努力无疑为几何学的"非欧几里得化"提供了有益的启示。

在兰伯特以后，德国法学家、一位业余的数学家施外卡特（Schweikart 1780～1859）也对第五公设进行了研究。施外卡特曾把他的研究结果送给当时最著名的数学家高斯征求意见，他把几何分为欧氏几何和假设三角形内角和不等于两直角的几何，并把后者称为"星空几何"，因为施外卡特认为它可能与星空中的图形性质相一致。值得指出的是，从历史的角度看，后者应当说代表了一种十分重要的认识，即是认识到了第五公设事实上是一种经验的总结，是欧几里得对物质世界的经验概括，因此它的正确性、自明性只存在于经验之中而并非存在于逻辑证明之中。既然第五公设是一种经验规律，那么，我们是否就可想象不同的几何呢?

继承施外卡特的工作，他的外甥陶里努斯（Taurinus 1794～1874）也对星空几何进行了研究。他在1826年证

明了星空几何中的一些定理与虚半径球面上的一些公式是一致的。但是，陶里努斯还没有能迈进非欧氏几何的大门，因为他只认为星空几何是一种没有逻辑错误的命题体系，而没有能认识到星空几何是与欧氏几何相类似的一种图形几何。

综上可见，对非欧几何逻辑可能性的认识，是萨开里、兰伯特和陶里努斯的共同特征，他们的努力离非欧几何的确立只有一步之遥。

6．2　非欧几何的建立

在非欧几何得到确立之前，许多数学家已经初步地发展起了这样的认识：第一、第五公设是不可能证明的；第二，就逻辑推证的意义，存在着与欧氏几何完全不同的没有矛盾的逻辑体系。

经过了漫长的时间旅途，最终登上最高峰的非欧几何创立人是三位数学家：高斯、鲍耶和罗巴切夫斯基。在这三位数学家中，高斯的突出贡献在于：他清楚认识到非欧几何像欧氏几何一样也可能被用于描述物质空间。

在数学史上被称为"数学王子"的高斯（1777～1855）是19世纪最伟大的数学家。他出生于德国的劳动人家，由于少年的学习中表现出较高的天赋，受到一位富有公爵的资助进入中学，后来在1795年进入哥廷根大学学习。青年时代的高斯在数学上表现出了极大的创造性。18岁时他发明了最小二乘法，19岁时解决了正17边形的尺规作图问题。数学上的成功使高斯改变了原来的语言文学方向并专攻数学。后来高斯在哈勒大学完成了

代数基本定理的证明，并由此获得哈勒大学的博士学位。高斯早期的数学研究工作主要在数论方向。一次高斯根据自己的“行星椭圆轨道理论”以及已有的不多数据，预见了一颗先前不曾记载的小行星的位置，结果被观测所证实。高斯因此获得了很大赞誉。1807 年高斯成为哥廷根天文台的台长和大学母校的教授。

高斯是一位伟大的数学家，同时也对许多科学领域作出了杰出贡献，在他所涉及的数论、代数、几何、分析、物理、天文、大地测量等领域中都有光辉的业绩。在非欧几何方面，他作了大量的研究，进行了长期的深入思考，获得了许多成果。遗憾的是，高斯在世时并没有发表过任何一篇关于非欧几何的文章，人们只是在他死后从他与朋友的来往信件中发现了他在这一方面的研究成果。历史给予了他应有的地位：他被公认为是非欧几何的创始人之一。

高斯很早就考虑过第五公设的问题，并且已经取得了一系列非欧几何的研究成果。高斯深信自己所获得的结果在逻辑上是相容的。他最初把这些结果称为“反欧几里得几何”，以后又叫“星空几何”，最后才称之为“非欧几何”——这个名字一直沿用至今。

高斯在他的研究中表明了两点看法：其一，第五公设不能用“人类的理智”给出证明；其二，对“欧几里得几何与物理空间的性质具有先验的一致性”提出极大怀疑。为了证明非欧几何具有某种物理空间的实用性，高斯并曾实测过由三个山峰构成的三角形的内角和，但由于三个山峰的距离还不够大，实验数据与误差值之间

不好比较，因此这一实验最终未能获得预期的结果。

由高斯1824年写给陶里努斯的信人们即可看到高斯对非欧几何的研究结果：

"假设三内角之和小于180°，会引出一种新奇的几何学，同我们的（欧几里得）几何完全不同，但也是一贯相容的。我已经把这种几何研究到自以为完全满意的程度，因而我能够解决这里的一切问题，除了一个例外，就是某一个常数的确定问题，而这个常数的值却没有办法预定下来。这个常数取值越大，就越接近欧几里得几何，当这个常数取为无限大时，这两种几何就合二为一了。这种几何定理，看起来自相矛盾、玄妙荒谬，但是平心静气地思索一下就可以看出，它绝不包含做不到的事情。比如，只要三角形的边长足够大时，它的三个内角要多小就有多么小，而不管边多长，三角形的面积也绝不超过某一定值。"[①]

另外，以下的论述则清楚地表明了高斯关于欧氏几何与空间理论的独到见解：

"我愈来愈深信我们不能证明我们的几何具有必然性，至少不能用人类理智，也不能给予人类理智以这种证明。或许在另一个世界我们可能得以洞察空间的性质，而现在这是不可能达到的。直到那时我们决不能把几何与算术相提并论，因为算术是纯粹先验的，但可把几何与力学相提并论。"[②] 又"按照我的最深的信念，在我们

---

① 张永春：《罗巴切夫斯基的科学思想和方法》，第71页，哈尔滨，黑龙江教育出版社，1992。

② 克莱因：《古今数学思想》，第三册，第289页，上海，上海科学技术出版社，1979。

先验的知识中间，空间理论与纯粹算术占有完全不同的位置，在我们关于空间理论的全部知识中，对作为纯粹算术特征的必然性缺乏完全的信念，……它的法则我们不能完全先验地规定。”①

高斯具有明确的非欧几何观念，相当完整地完成了非欧几何的创建工作；但是，由于害怕“愚昧的人”（beotian）的叫嚷，他却没有将这方面的研究成果公布于世。不过高斯去世之后他的书信的公布大大推动了人们对非欧几何的认同和理解。

在非欧几何创立的历史上，还有一位在当时几乎没有什么名气的数学家鲍耶（J. Bolyai 1802～1860），他对非欧几何的创立也作出了重大贡献。

鲍耶的父亲在哥廷根大学时曾与高斯是同学，也曾长期研究过第五公设的问题，并与高斯经常有书信往来。受父亲的影响，鲍耶很早就思考过第五公设的问题，他在维也纳工程学院学习以及毕业后在军队任工程军官期间，更一直业余进行这方面的研究工作。

鲍耶的父亲不赞同儿子对第五公设的研究，因为他知道这个问题在历史上曾消耗过许多数学家的青春；但是当儿子取得成果时，父亲还是设法帮助他出版，并把结果写信告诉了高斯。鲍耶原期望获得高斯的认可和支持，但是这一希望却被高斯的来信彻底击破了，因为高斯在回信中说，这个结果“几乎完全与我心中已经深思熟虑了三十到三十五年的一切心得相符合。这一点实在

① 克莱因：《古今数学思想》，第四册，第107页，上海，上海科学技术出版社，1979。

使我大为震惊。"

从年代上看，鲍耶公开出版自己关于非欧几何的研究成果，要比首先发表这方面成果的罗巴切夫斯基晚了三年，但这个研究成果却是他独立获得的。鲍耶对于非欧几何在数学的意义上考虑得比较深入，他对新几何的无矛盾性进行了长时间思索，并力图找到一种有关新几何无矛盾性的证明。尽管鲍耶注意到了这种新几何学中的三角学与虚半径球面三角相同，但他并不满足于这一结果，而是希望能获得进一步的成果，但后一努力并没有成功。

鲍耶对非欧几何作出了杰出贡献，但在当时他的数学工作并没有引起人们的重视，只是在他穷困多病去世之后，非欧几何才被数学界和整个世界所接受，而也只是在这个时候，人们才记起了这位数学家。1894 年，在人类即将走向 20 世纪之时，匈牙利数学物理学会为这位曾被人遗忘的数学家竖起了墓碑和石像。

非欧几何，这个从欧几里得时代开始就纠缠数学家的噩梦，现在终于得到了完美的解决。最完整、最先出版非欧几何的研究成果、并最早得到社会承认的是俄国数学家罗巴切夫斯基。

罗巴切夫斯基（1792～1856）毕业于俄国喀山大学并留校任教。早在 1826 年罗巴切夫斯基就完成了他在非欧几何方面的第一篇论文《几何原理简述和平行线定理的严格证明》。在这篇文章中罗巴切夫斯基论述了非欧几何的存在并指出了它的内容，但这一文章只在规模不大的学生范围内得以介绍而没有正式发表。

罗巴切夫斯基于1829年在喀山大学校刊《喀山通讯》上发表的论文《论几何学原理》是数学史上最早的非欧几何论著。在这一论文中，罗巴切夫斯基为阐述这一新的几何学理论提出了一系列的新概念，如极限圆、平行角等。罗巴切夫斯基所提出的一个较为著名的非欧几何原理是：

过直线 l 外一点 A 作此直线的垂线和平行线，两者所形成的角不是直角，而是比直角小。

这个原理表明，在非欧几何（罗巴切夫斯基几何）中三角形内角之和小于两直角，三角形越大，它的内角和就越比两直角小。

在说明非欧几何与当代几何（欧氏几何）的关系时，罗巴切夫斯基指出，当代几何的状况可以看成非欧几何的极限状态，或者说，即是非欧几何的一种特例。于是，这两种几何就都有了逻辑上各自存在和适用的范围，特殊地，这也就为非欧几何的存在提供了理论依据。

由于当时喀山大学的数学家们并没有能领会《论几何学原理》的内容，因此这一论文的发表就没有引起什么争议和反响。同时，由于喀山大学是一个名不见经传的新建大学，又由于当时世界上数学交流的某些障碍（当时国家间比较有影响的学术交流大都在国家的科学院之间进行），因此其他国家的数学家也就不知道罗巴切夫斯基的研究成果。这些相对平静的外部环境使罗巴切夫斯基能有机会认真深入地进行非欧几何理论的研究。

从1835年到1838年，罗巴切夫斯基完成并发表了一系列的论文——《虚几何学》、《虚几何学在一些积分上

的应用》、《几何学新原理暨完整的平行线理论》。到此时，罗巴切夫斯基实际上已经完成了非欧几何的概念表述、逻辑推理和理论构造等方面的一系列工作，完整的非欧几何（罗巴切夫斯基几何）理论已经形成。但是，直到此时世界上对他的研究成果仍然反响甚微，于是罗巴切夫斯基决定用外文在国外发表自己的研究成果。1840年，罗巴切夫斯基以德文在国外发表了《平行线理论的几何研究》，于是他的研究成果开始在世界范围内产生影响。

高斯在得到罗巴切夫斯基1840年的德文版论文后给予了高度赞扬，并经高斯的提议，1841年罗巴切夫斯基作为“俄罗斯帝国杰出的数学家”之一被吸收为哥廷根科学协会的通讯会员。然而，这种反欧氏几何的新几何理论也引起了许多批评。正如高斯曾预料的那样，非欧几何的支持者寥寥，而反对者、讥笑嘲讽者甚至攻击者却大有人在。当时的一位主教甚至宣布罗巴切夫斯基的学说是邪说，有人则在报纸杂志上攻击罗巴切夫斯基。但是，各种反对意见都没有能阻止罗巴切夫斯基对非欧几何的进一步研究。直到晚年他双目失明以后，还通过口授的形式完成一部非欧几何的新作《泛几何》，这一著作于1855年发表。

罗巴切夫斯基非欧几何的问世，标志着非欧几何的确立。它吸收和运用了许多数学家的成果，真正使其成为一个体系并把它公布于世，这是罗巴切夫斯基对非欧几何的重大贡献。

在创立非欧几何的过程中，罗巴切夫斯基没有高斯

那么多的顾虑，一旦认准了方向，他就勇敢地把自己的研究成果发表出来。另外，与鲍耶相比，罗巴切夫斯基对非欧几何的思考和研究则更加广泛和深入：鲍耶创造非欧几何时，只是把第五公设当作一个纯几何的问题去加以思考和证明，而没有像高斯和罗巴切夫斯基那样从实用性的层次去考虑几何的存在形式，更没有认识到非欧几何也可能是物质空间的一种存在形式。

对于罗巴切夫斯基与高斯和鲍耶在非欧几何研究方面的差异我们并可作出如下的进一步分析：

首先，罗巴切夫斯基作为一个从事教育工作的数学家，更加注重从教学的角度去分析欧氏几何存在的问题，这种关于第五公设的深入思考就使他所创立的非欧几何体系具有比较严谨的数学教学特征，这些思考也使他比较容易把欧氏几何看成非欧几何的极限状态，这些特点是没有从事教学实践的鲍耶所不可能具备的。

第二，在创立非欧几何的过程中，罗巴切夫斯基较多地考虑了数学概念与物质世界、数学原始命题与人类经验的关系，从而不仅确信非欧几何与欧氏几何一样也是物质世界的一种表现形式，更为非欧几何的建立提出了一些全新的数学概念。应当指出的是，这种考虑数学基本概念、原始概念的思想方法实际上已经进入到了数学的哲学层面，即已超越了几何与物质世界直接对应的思考。也正是在后一意义上，罗巴切夫斯基对于非欧几何创立，特别是新概念的提出及运用，可以被认为已经超越了高斯从实践意义上对非欧几何的思考。

非欧几何的创立同微积分的创立很相似，许多数学

家都在不同的历史阶段做过努力，但是却由几个人完成了伟大历史史乐的最后乐章。在非欧几何的历史上，高斯、鲍耶和罗巴切夫斯基是最后乐章的演奏者；但是，由上面的论述我们已可看出，就这三者对非欧几何的贡献而言，中国著名的数学史学家梁宗巨先生的评价是客观的："非欧几何的创立，就发表时间之早，论证的完整和内容的丰富，以及对新几何学终生不渝的捍卫来说，鲍耶和高斯都不能和罗巴切夫斯基相比。"[①] 1893年，喀山大学校园内建起了罗巴切夫斯基的塑像，以纪念这位伟大的非欧几何创立者的功绩。

6．3　回顾与思考

当高斯、鲍耶和罗巴切夫斯基等人在世之时，他们在非欧几何方面的工作并没有给他们带来什么荣誉；相反，他们所受到的批判和诋毁远远多于赞誉。在罗巴切夫斯基和高斯去世之后，后者的一些通信得到了发表，高斯的名望使人们对非欧几何有了一些新的认识。从而，这也就从一个侧面证明了这样一点："一个新的数学概念的创造者的名望和地位在该概念的可接受性方面起着强制的作用，尤其是在新概念突破了传统时是这样。"另外，高斯、鲍耶和罗巴切夫斯基等人几乎同时创立了非欧几何的事实显然也为以下的结论提供了又一实例："重大问题的多重的独立的发现或解决，是一条规律，而不是例外。"（可参见第三章。）

① 梁宗巨：《世界数学史简编》，第235页，沈阳，辽宁人民出版社，1981。

尽管非欧几何的建立已经结束了数学界中自欧几里得时代开始并延续了两千多年的一件“公案”，但是，由这一历史的回顾我们仍可获得不少有益的启示和教训。特别是，这即是值得人们深入思考的一个问题：为什么萨开里、兰伯特等人事实上已经站在了非欧几何的大门口，但却没有能够成功地跨出最后的一步？

笔者以为，我们在此当然应当看到个人的因素，但从总体上说，我们又不能不清楚地看到整体性的文化环境、特别是思想观念在这一过程中所发挥的重要作用。

具体地说，我们在此所论及的主要是数学的真理观，包括数学与物理世界的关系。

正如前面所已指明的，在古希腊文化中，自从柏拉图在哲学上用五种正多面体构造和解释世界以来，欧几里得的《几何原本》就成为一种表现世界、构造世界的模式。《几何原本》那种公理、公设演绎数学命题的形式，以及以三段论式的逻辑推演数学命题的过程，表现了数学所具有的独特的理性特征。作为柏拉图哲学的数学表现模型，《几何原本》表现了一种哲学式的解释宇宙万物的魅力。“古希腊的几何学并不是像今天的数学那样，大体上是由假设命题构成的形式逻辑，而是一幅现实世界的理想的图画。”[1]

欧氏几何所表现的这种现实世界的理性图画，在基督教神学那里获得了进一步的发展。托玛斯·阿奎那通过古希腊数学与基督教的结合，使欧氏几何获得了一种宗

① 卡尔·波耶：《微积分概念史》，第50页，上海，上海人民出版社，1977。

教的力量。实际上，就古希腊的数学而言，既有以《几何原本》为代表的几何学发展，也有与实际应用相结合的代数方向的发展。但是，在欧洲的中世纪，数学家就被看做是几何学家，“代数”则通常与巫术相联系，并受到了教会的严厉打击。这种现象告诉人们，在欧洲的中世纪，几何不仅是一种哲学意义上的描述世界的图景，而且是上帝设计万物的模式。欧氏几何在上帝那里获得了一个受宠的席位，几何的逻辑演绎方法并给中世纪的经院哲学提供了一种逻辑思维的模式。

文艺复兴时期，中世纪基督教神学所表现出来的那种落后性、僵滞性受到了强烈的批判，但是，在这一古希腊文化的复兴过程中，欧氏几何又一次获得了自己的新生。古希腊数学所表现出来的理性精神，以及《几何原本》公理、公设所表现出来的准确无误的确定性、逻辑性，成为文艺复兴时期冲击基督教神学的一面理性的战斗旗帜。数学，尤其是欧氏几何给文艺复兴提供了一块理性的净土，而文艺复兴时期艺术大师们对古希腊几何学的学习、运用和研究则又进一步强化了欧氏几何作为一种理性的地位。数学表现了一种真理，而且是经世不变、颠扑不破的永恒真理。文艺复兴中古希腊数学理性的复兴以及欧氏几何地位的强化，使几何学的表现形式、构造模式成为一种理性的表现和构造形式，从而其就越出基督教神学的范畴而成为了一种文化的理性精神和一种表现科学形式的理性模式（对此在第八章中还将作出进一步的论述）。

在文艺复兴之后，微积分的发展，各种自然科学的

发展取得了远远超越欧氏几何的成果；但是，欧氏几何学作为理性精神的一种表现形式却仍然牢牢地占据着统治地位。天文学、物理学、光学、机械力学等方面的发展，已使欧氏几何的表现捉襟见肘，但作为一种数学的表现形式，作为一种哲学的理性，作为神学中上帝设计世界的数学模式，欧氏几何的真理地位却很少发生动摇。

例如，对于上述结论最有代表性的说明就是几何学在微积分发展过程中所起到的作用。牛顿的老师、对微积分创立作出过重要贡献的巴罗认为欧氏几何是绝对的真理，他认为几何原理来自一种内在理性，几何原理为长期的经验所不断证实，欧氏几何是完备的和肯定无疑的科学。特殊地，巴罗并曾对欧氏几何的表现形式给予了高度评价。他指出欧氏几何概念清晰、定义明确，公理直观可靠而且普遍成立，公设清楚可信易于想象，公理数目少，引出的方式易于接受，证明顺序自然，避免未知事物。另外，作为微积分和经典力学的重要创造者——牛顿，也对欧氏几何所表现出来的数学构造模式格外信奉。在牛顿看来，欧几里得的几何原理同其他数学定律一样，是宇宙设计中固有的规律。牛顿在他的巨著《自然哲学的数学原理》一书中，把一切可用几何表述的物理定律都用几何的方法给出逻辑证明。牛顿和当时的许多数学家一样"想把逻辑基础模糊的算术、代数和分析，建立在欧几里得的几何之上，从而保证这些分支的真理性。"①

① 克莱因：《古今数学思想》，第二册，第276页，上海，上海科学技术出版社，1979。

但是，随着科学的发展，人们的认识不可避免地会发生一定的变化。就西方文化而言，这首先就是对宗教神学、包括自然界是按数学设计的这一哲学和宗教的核心观念的怀疑。这也就如克莱因所指出的："整个哲学思想的核心，即宇宙是上帝设计的这一教义，逐渐地被纯粹数学——物理的解释削弱了它的基础，甚至推动数学工作的宗教方面的努力在 17 世纪时就开始失去了地盘。"① 由于上述的核心观念事实上就构成了数学、特别是几何学绝对真理性的直接基础，因此，随着宗教神学地位的动摇，人们自然也会进而考虑这样的问题，即我们究竟应当怎样去看待数学的真理性。

从历史的角度看，哲学家们属于最早对上述问题进行深入思考的思想家行列，而且，这种关于数学真理性的深入思考并是与关于其他自然科学真理性的思考直接相联系的。具体地说，由于观察和实验在文艺复兴时期以后的自然科学研究中占据了越来越重要的地位，因此，人们逐渐建立起了这样的认识，即认为大部分自然科学的命题都应被看成一种经验命题，特别是，这些命题往往就是对经验事实进行归纳的结果。然而，由于经验显然并不是完全可靠的，由经验去引出普遍结论的归纳法在逻辑上也不能说无可指责，因此，关于自然科学命题经验性的断言事实上也就是对于这些命题绝对真理性的一种否定，也即是与关于数学命题绝对真理性的信念直接相对立的。

---

① 克莱因：《古今数学思想》，第二册，第 380 页，上海，上海科学技术出版社，1979。

那么，我们究竟应当怎样去看待数学的真理性呢？一种可能性显然就是将数学也看成一种经验命题，即是完全放弃数学命题的绝对真理性。但是，就18世纪的普遍情况来说，哲学家们所采取的是一种相反的立场：他们仍然坚持了数学命题的绝对真理性，并把数学与一般自然科学清楚地区分开来。

例如，作为微积分学的创始人之一，同时也是哲学家的莱布尼兹就曾明确地强调了两种真理的区分。他写道："……真理……有两种。它们或者是属于理性的真理之列，或者是属于事实的真理之列。理性的真理是必然的，事实的真理是偶然的。"[①] 特殊地，在莱布尼兹看来，未能对所说的两种真理作出明确的区分事实上就是所谓的经验论者的根本错误之所在。莱布尼兹指出，作为经验论的一个主要代表，洛克的错误就在于："他没有把源自理智的必然真理的起源，和来自感觉经验，甚至来自我们心中那些混乱知觉的事实真理的起源，作充分的区别。"[②] 另外，尽管休谟（1711～1776）作为一个哲学家主要属于经验论者的行列，但是，他不仅首先从逻辑上对归纳法的普遍有效性提出了有力的挑战，而且也明确地强调了两种知识的区分。休谟这样写道："人类理性（或研究）的一切对象可以自然分为两种，就是观念的关系和实际的事情。""属于第一类的，有几何、代数、三角诸科学；总而言之，任何断言，凡是有直觉的确定性或解证的确定性的，都属于前一种。……这类命题，我

① 莱布尼兹：《人类理智新论》，第411－412页，北京，商务印书馆，1982。
② 同①，第37页。

们只凭思想作用，就可以把它们发现出来，并不必依据于宇宙中任何地方存在的任何东西。”“至于人类理性的第二对象——实际的事情——就不能用同一方式来考究；而且我们关于它们的真实性不论如何明确，而那种明确也和前一种不一样。各种事实的反面总是可能的。”[1]

由上面的引言我们也可看出，当时的哲学家正是通过把数学命题归结为先验真理来维持其绝对真理性的。例如，尽管对数学命题的性质有着不同的理解（即认为数学命题事实上是一种先天综合判断），但是，作为德国古典哲学最主要的代表人物之一，康德（1724～1804）也突出地强调了数学命题的先验性。康德写道：“纯数学这个概念就暗示着它不包含有经验的知识，只包含纯先天的知识。”又“严格的数学命题都永远是先天的判断，而非经验的判断，因为，它们具有不能来自经验的必然性。”[2] 另外，按照康德的观念，数学必然真理性的最终渊源不能归结为上帝的意愿或安排，而应从人类自身内部去寻找。这即是指应被看成人类理性的一种表现。具体地说，作为感性认识的具体分析，康德指出，这并非思维对于外部世界纯粹被动的反映，而是外部所给予的感觉素材（他称之为“现象的质料”）与理性本身固有的认识能力所提供的形式（他称之为“现象的形式”）的有机结合，因为，只有借助于先天的“形式”，杂多的“质料”才能被安排在一定的关系里面。进而，康德提出，

---

① 休谟：《人类理解研究》，第26页，北京，商务印书馆，1972。

② 康德：“纯粹理性批判”，载《十八世纪末——十九世纪初德国哲学》，第9页，北京，商务印书馆，1960。

时间和空间是感性的两种基本形式：前者是外感官的形式，后者则是内感官的形式。这也就是说，只有借助于“空间”这一形式，我们才能感知到外部的对象；而又只有借助于“时间”这一形式，我们才能直观到心灵自身或其内部状态。最后，由于几何和算术分别是关于空间和时间的知识，因此，在康德看来，由时空的先验性和直观性我们也就可以立即断言数学命题是所谓的“先天综合判断”，即其同时具有先天性和综合性，特别是，所说的“先天性”也就直接决定了数学命题的必然性。（或者更为恰当地说，即是数学命题的绝对真理性。）

综上可见，尽管科学的发展已经向宗教神学、包括自然界是按数学设计的这一信念提出了直接的挑战，但在很长的时期内，人们仍然坚信数学是一种绝对真理，而又正是哲学在这一方面给人们提供了必要的支持。但是，从数学的历史发展来看，后者却事实上成为了束缚人们思想的一种精神桎梏，特别是，这就正是导致萨开里等人未能成功地创立非欧几何的一个重要原因。事实上，由前面的论述我们知道，由于在用反证法证明第五公设的努力中萨开里等人已经获得了一系列属于非欧几何的结论，因此，如果单纯着眼于相关命题的逻辑推导，那么，非欧几何在萨开里等人那里就可说是已经得到了建立。这也就如克莱因指出的：“如果非欧几何意味着一系列包括异于欧几里得平行公理的公理系统推论的技术性推导，那么最大的功绩必须归于萨开里……”[①] 但是，

① 克莱因：《古今数学思想》，第三册，第285页，上海，上海科学技术出版社，1979。

萨开里等人却始终未能明确地提出非欧几何的思想，特别是未能清楚地认识到非欧几何也可能是物质空间的一种存在形式，而这主要就是由于上述的传统思想的影响，即是认为欧氏几何是空间惟一可能的存在形式。“直到1800年左右，所有的数学家都认为欧氏几何是物质世界和此空间内的图形性质的正确理想化。”[①] 特别是，这种认识更由于康德等哲学家的阐发和影响而牢牢地扎根于西方文化之中。

与此相对照，高斯等人之所以能够创立非欧几何，一个首要的原因也就在于他们敢向欧氏几何的绝对真理性提出明确的挑战。例如，除上面所已提到的高斯的有关言论外，我们在此还可举出罗巴切夫斯基的以下论述：“自欧几里得的时代起，两千年徒劳无益的努力使我产生了这样的怀疑：我们所希望的真理性并没有包含在这些材料本身之中，而又正如其他的自然规律，这只有借助于经验的帮助，诸如天文学的观察，才能得到建立。……我最终确信自己的这一想法是正确的。”[②] 显然，按照这样的认识，欧氏几何的真理性就惟一地建立在经验之上，从而也就不是关于空间惟一可能的存在形式，特别是，即使我们不能立即断言与欧氏几何相对立的另一种几何理论也可被用于物质空间，但是，我们则又完全可以从理论的角度去对这种可能的几何学进行研究，也即建立起非欧几何的系统理论。

① 克莱因：《古今数学思想》，第三册，第276页，上海，上海科学技术出版社，1979。

② R. Bonola：《Non－Euclidean Geometry》，Dover Pub. Inc，1955，P. 92.

显然，从这样的角度去分析，高斯之所以企图通过实测由三个山峰构成的三角形的内角之和来证明非欧几何的正确性，以及他曾把非欧几何称为“星空几何”，即是认为这可能与星空中的图形性质相一致，就是完全可以理解的了。

最后，应当指明，从上述的角度去分析，非欧几何的建立显然也就意味着在数学与物质空间之间长期存在的必然联系现在被切断了。这样，数学就从“柏拉图所置于宝座上被拉下来了”；但是，就数学自身的发展而言，这却又为其开拓了无限广阔的前景。也正是在后一意义上，非欧几何即可被看成现代数学的实际起点，并导致了数学观的重大变革。

6．4　非欧几何与西方数学观的革命

就西方文化而言，在非欧几何创立之前，这是一种十分根深蒂固的信念，即是认为欧氏几何构成了现实空间的惟一可能形式，也即是关于空间的绝对真理；然而，非欧几何却要打破这千百年来不可动摇的信念，其受到的阻力是可想而知的。

事实上，非欧几何所表现出来的对欧氏几何真理性、客观性和实在性的挑战，不仅西方的哲学、宗教无法接受，就是数学家本身也难以接受。例如，尽管著名的英国数学家、四元数的创立者哈密尔顿（1805～1865）在数系的扩充和创立中发挥了极大的创造性，但是他认为自己的作法只是寻找自然界的客观规律，而非欧几何则是破坏了作为人类经验的物理空间的规律。哈密尔顿指

出："没有哪一个坦白的、有智力的人会怀疑两千年前欧几里得在他的《几何原本》中提出的平行线的主要性质，尽管他可能会希望看到它们以更明确更好的方式来叙述；这些性质中没有任何令人费解或含混不清之处，没有任何你可以怀疑的地方，虽然可以经常地动脑筋改进它们的表述方式。"①

对于18世纪和19世纪的数学家们来说，相信欧几里得几何建立了物质空间的理论体系，从而表现了一种客观的真理，这是一种执著的信念，然而非欧几何把这些都给破坏了。也正因为此，在罗巴切夫斯基和鲍耶关于非欧几何的著作发表后的三十多年时间里，除少数的数学家持欢迎态度外，几乎所有的数学家都对此置之不理。数学界采用了一种抵制的态度来对待非欧几何，有些人甚至更把非欧几何看做是异端邪说。不过，数学的发展，尤其是高斯的通信和笔记材料的发表，再加上意大利数学家贝特拉米于1868年证明了非欧几何对于欧氏几何的相对相容性［具体地说，通过引入适当的"解释规则"，贝特拉米在罗巴切夫斯基几何的平面与欧氏空间的一个曲面（伪球面）之间建立了对应关系，他并证明了在这样的对应下罗巴切夫斯基（平面）几何中的所有公理都对应于欧氏（立体）几何中的定理，这样，罗巴切夫斯基几何对于欧氏几何的相对相容性就得到了证明，因为，如果罗巴切夫斯基几何中包含有两个互相矛盾的结论，那么，通过上述的对应，在欧氏几何中也就可以推出两

① 克莱因：《数学：确定性的丧失》，第90页，长沙，湖南科学技术出版社，1997

个互相矛盾的结论，这样，由罗巴切夫斯基几何的不相容性我们就可立即推出欧氏几何也是不相容的，或者说，由欧氏几何的相容性我们则就可以推知非欧几何也是相容的]，这就使得数学界开始逐渐相信非欧几何也是一种合理的几何理论。对于当时的数学家来说，相信存在有多种互不相容的几何理论无疑是一个极大的转变，而使人更加感到不安的，则是在很多数学家看来这事实上也就意味着数学真理性的丧失："这样多的至少是部分地互相矛盾的几何学居然都能用来描述物理空间，我们真不知道，对于物理空间来说，究竟哪一种是真实的了。"这也就是说，"数学自命为真理的态度已经是必须抛弃的了。"①

从而，在西方的数学史上，非欧几何的建立就是引起数学观念根本性变革的一件大事，因为对非欧几何的确认，实际上就已经意味着从古希腊以来的、以数学为代表的绝对真理观的终结。这就是说，人们现已不得不开始改变把真理和客观规律与数学等同起来的传统观念；恰恰相反，数学可以是来自经验启示的一种创造，但它并不等于客观世界的规律。对于源自古希腊文化和基督教神学的西方理性来说，承认数学不再是一个真理体系实在是一个不易接受的事实；然而，非欧几何的确立却使西方文化最终不得不接受了理性观念的这一转变。"数学家们只能得出这个令人沮丧的结论：数学中没有真理，即作为现实世界普适法则意义上的真理。算术和几何基

① 克莱因："数学的基础"，载《自然杂志》，1979年，第四、五期。

本结构的公理是受经验启发得出的。因而这些结构的适用性是有限的，它们在哪里是适用的只能由经验来决定。希腊人试图从几条自明的真理出发和仅仅使用演绎的证明方法来保证数学的真实性被证明是徒劳的。"①

除去真理观的变化以外，非欧几何的建立还造成了西方数学观、特别是数学研究思想的重要转变。

具体地说，非欧几何的出现和确立使人们开始认识到，在以往的数学研究中人们事实上是把直观和经验用作了数学的基础，尽管这主要地是一种不自觉的行为。这种以直观和经验作为数学基础的作法，带来两个方面的问题：首先，由于数学以直观和经验作为基础，数学与客观规律、客观真理就被完全地等同起来——数学成为了客观规律、真理体系的化身；其次，也正因为此，人们的思维和数学创造就被严格局限于直观和实践经验，从而就无法自由地展开思维创造的翅膀。

显然，在上述的意义上，非欧几何对欧氏几何的挑战也就是对于以直观和经验作为数学基础这一传统作法的挑战，并把数学的研究从直观、经验的局限下解放出来。因为，非欧几何的建立已经表明：数学的研究可以不受直观、经验的局限，并扩展到对于逻辑上可能的规律和形式的研究，尽管后者很可能只是思维的一种自由创造，也即没有（或者说，至少在当时没有）明显的直观意义或现实背景。这样，非欧几何就把人类的数学引向了更广泛、更抽象、更理想化的理性创造领域。也正

① 克莱因：《数学：确定性的丧失》，第89页，长沙，湖南科学技术出版社，1997。

是在这样的意义上，人们通常就把非欧几何的建立看成现代数学研究的实际起点。

综上所述，非欧几何的建立就标志着数学已最终摆脱了由宗教神学和哲学理论所赋予的种种重负，同时也不再受到直观和经验的直接束缚，而是开拓了一个崭新的创造天地。这就是说，数学的地位已经由古希腊表现宇宙万物的构造到表现基督教神学的教义，再经由客观真理的体现，直至最后由于非欧几何的作用下降为一种定义、公理和逻辑演绎的构造体系；而且，各种可能的数学体系的构造也不再受直观和经验的直接约束。显然，相对于传统的数学观而言，这代表了一种全新的数学观(或者说，构成了一种全新的数学传统)。从而，在这样的意义上，我们就可以说，非欧几何的建立直接导致了数学观的革命。这也就如克莱因所指出的："在19世纪所有复杂的技术创造中间，最深刻的一个，非欧几何，在技术上是最简单的。这个创造引起数学的一些重要新分支，但它的最重要影响是迫使数学家们从根本上改变对数学的性质的理解，以及对它和物质世界的关系的理解"。[①]

当然，上述的变化并不意味着数学对于西方文化已不再具有任何特殊的意义，勿宁说，非欧几何的建立即已表明数学作为西方文化的一种理性精神已不再具有理性解释的功能，而主要地只是表现为一种具有应用价值的理性方法。

---

① 克莱因：《古今数学思想》，第三册，第275页，上海，上海科学技术出版社，1979。

最后，为了正确地理解数学的现代发展，我们还应指出，尽管现代的数学研究已不再局限于直观和经验的束缚，但是，就如第二章中所已明确指出的，我们又不能将数学的研究看成是一种任意的创造，这也就是说，数学创造中的"自由性"并不能简单地被等同于"任意性"。

特殊地，我们在此并应清楚地看到在理论研究与实际应用之间所存在的辩证关系。事实上，就总体而言，西方的数学发展始终存在有两个不同的方向。例如，就古希腊数学而言，我们就可大致地区分出这样两个方面：一是以《几何原本》为代表的逻辑演绎系统——一个多少有点缺陷的几何体系；另一个则是经验算术及其延展而形成的代数。当然，西方数学在这两个方向上的发展并不是十分平衡的，特别是，由于在古希腊和后来的欧洲人们所主要关注的是数学的理性解释功能而并非它的应用价值，因此，这一时期中数学在西方文化中的发展主要地就是围绕几何的研究进行的，而也正因为此，人们就特别关注数学逻辑论证的精确形式。但是，即使在这种特定的文化氛围中，社会与实践的需要仍一直在推动和保留着另一方向上的发展。

特殊地，就如第五章的论述所已表明的，微积分在西方文化中的发展事实上就已清楚地表明了实践的需要确应被看成推动数学发展的巨大力量：尽管微积分的概念不够清楚严密，相应的推理论证在逻辑上也不够准确严格，但是，应用上的巨大价值却使一切惟理性意义上的攻击和批判都显得"太阳力弱不胜风"。当然，微积分

的严密化，也即严格极限理论的建立最终给了西方文化理性的刻意追求一个满意的回答，但是，这毕竟发生在微积分以实践应用为目标的成功之后。

也正是基于这样的考虑，笔者认为，微积分和非欧几何的建立就可被认为代表了西方数学两个不同的发展方向，因为，与微积分的发展过程不同，非欧几何的创立主要地即是沿着古希腊理性、基督教神学、18 世纪的哲学追求这样一条追求理性的道路前进的结果，只不过对于欧氏几何第五公设的理性修补最终却走向了与初始目标完全相反的方向：它失去了作为自然规律理性基础的崇高地位。然而，作为一种补偿，数学却又获得了逻辑创造和演绎推理的极大自由，或者说，即是最为集中地体现了一种“为数学而数学”的发展方向。

就现代而言，尽管康托的集合论以及后来的数学研究领域的极大扩展，使数学之树纷繁复杂，但是，数学的发展仍可看成是由微积分和非欧几何所指明的实践应用和理性构造这样两个路标所指引。当然，这两条道路有时会有交叉，但其方向人们仍可辨别，特别是，非欧几何所体现的不受经验、直观、物理模型束缚的数学创造，更可说是代表了现代数学的主要发展方向，当然，又如第二章中所已指明的，这一方向的前进还要看实践应用的“天气变化”，然后才能决定是迅疾前进还是小心等待。

最后，依据以上的论述我们也就可以更为清楚地去理解数学作为西方文化中一种理性精神在现代的主要涵义。这就是指，人们在今天之所以要从事数学的研究，

主要是为了科学意义上的实践应用，即是为人们认识世界、表现事物提供必要的理论框架和思维方式。但是，数学又并非现实世界的简单摹写，而是为人们追求客观真理提供了必要的思维方式、计算方法和表述方式。当然，又如前面所已指明的，西方文化由自古希腊文化以来所一直赋予数学的那种理性解释的功能，转向数学的实践应用和提供一种可供借鉴的理性思想、理性精神，这一数学价值观念的重要转变主要地就可被看成非欧几何对于西方文化的一个重要冲击。

文化是由人所创造的，一种文化的价值观念也是由人来表现的。当西方文化中的数学处于文化系统中的理性层面的时候，这种理性解释的价值观念无疑会吸引整个文化系统中具有理性观念的文化人士，尤其是会吸引整个文化中的精英分子，而且，就如第四章中所指出的，这事实上也就是无理数危机、无穷小危机等何以会吸引那么多的人参与，更对整个西方文化产生那么大的影响的深层原因。

与此相对照，数学在今天已归复到了实践应用的地位，尽管它还是一种理性思维的方式，还是一种理性精神，但是，数学的变化和危机已不可能在社会中产生太大的影响，同样，数学也不再可能吸附整个社会的精英人才。从数学的角度看，由非欧几何所造成的西方数学价值观念的这一变化也许可以说是数学的一种“衰落”；但是，从整个文化看，这又显然代表了人类文化的进步。

综上所述，非欧几何的建立促成了西方数学在整个文化中的地位、发展方向和价值观念的重大变化，它标

志着人类的数学脱离了原有文化加在数学上的各种非数学自身所应有的重负。数学发展了，数学自由了，但是数学从此也失去了可与宗教、哲学相提并论的辉煌地位。古希腊数学的创造使其获得了迷人的神秘袈裟，非欧几何的创立则使人们最终透过袈裟看到了充满活力并具有无限创造力的数学真面目。

第七章　中西数学的文化比较

就数学文化史的研究而言，当然不能仅仅着眼于西方数学，而也应当同时论及中国（还有印度等）古代数学与古代文化的关系；另外，对我们来说中西数学的比较则更可以说构成了数学文化研究的一个重要课题。本章就是这一方向上的初步努力，笔者并以此为依据从更高的层次对中西数学的评价问题和数学文化史研究的特点和意义作了进一步的分析。

7．1　中国文化中的数学

中国古代文明是人类最古老的文明之一。西部世界屋脊的崇山峻岭、北部的冰天雪地和广阔的蒙古高原、东南部的浩瀚太平洋，决定了地域相对封闭的人类文化的独立创造过程。原始思维所共有的数量关系、数字的神秘解释形式，在这一相对独立的文明发展进程中演变成了中华民族古代数学的独特形式。

刻画记数、结绳计时是人类各民族在计数过程中几乎共有的过程，中国古代也有“事大，大结其绳；事小，小结其绳，结之多少，随物众寡”的记载。另外，在中国现有的少数民族中也还可以发现刻画记数、结绳记数的现象。①

正如第四章中所指出的，在原始思维的水平上，数字与事物之间存在着某种对应、某些关联，它们既是数又是某种事物的代表。人类学家所说的这种数的神秘互渗律在中国古代计数的最早形式中同样存在着：此时的数是被感觉和感知的，而不是像现在这样以一种抽象的形式被建构和思考。

中国古代数学的独特现象之一，是数字最终演化为以“筹”（竹棍）的形式来表示，并就以此为工具进行数学的运演操作。这是一种与古希腊数学符号运演相异的手工操作运演形式。

古代中国在创造最早的十进位制的运算形式的同时，也形成了一种以蓍草（竹棍）为工具的神秘解释活动——筮法。司马迁在《史记·龟策列传》中曾指出中国古代“王者决定诸疑，参与卜筮，断以蓍龟，以易之道也。”

每一种文化都要形成一种对宇宙的解释方式，并以此回答从蒙昧走向文明的人们对宇宙万物的不断询问。中国古代是一个龟筮盛行并以龟筮的神秘方式来解释万物的社会。《尚书·洪范篇》中记载说，国王有了重大的

① 李迪：《中国数学史简编》，第10页，沈阳，辽宁人民出版社，1984。

疑难，必须问卜占卦，如果得不到龟卜和蓍筮的赞同就不能行动。这就是说，即使国王和贵族及庶民都赞同，但如果得不到龟卜和蓍筮的一致同意，就不能行动，否则就会不吉利。由此可见龟筮之法在中国古代文化中具有至高无上的解释权威。

由于筮法与中国古代数学同样用竹棍作为直接的工具，这就暗示在这两者之间可能存在有十分重要的联系。事实是，中国古文字的象形演化在这方面为我们留下了一些明显可寻的印迹。

中国古代的算字有三种字体：算、筭、祘。汉代的许慎在《说文》中解释说："算，数也。""筭，长六寸计历数者从竹从弄，常弄乃不误也。""祘，明视以筭之，以二示。"《说文》中并指出："数，计也，从攴。"甲骨文解释说：示的上部"二"表示上，下部的"小"表示日月星，而"数"字的"攴"旁其上部表示占卜，下部表示右手。另外，《说文》中解释，"筮，易卦用蓍也，从竹从巫。"显然，这些文字的象形演变告诉我们，在中国原始文化的发展中，竹棍有着双重的作用，即神秘的筮法解释作用和计算数量的作用。

另外，在中国古代的文献中，我们也可找到关于数学神秘解释功能和数量计算功能的双重作用，以及数学与筮法之间重要联系的一些直接证据。例如，《汉书·律历志，卷二十一上》中记载："数者，一十百千也，所以算数事物，顺性命之理。"另外，南宋的秦九韶在《数书九章》一书的序中则曾写道："今数术之书，尚三十余家。天象历度谓之缀术；太乙壬甲，谓之三式，皆曰内

算，言甚秘也。《九章》所载，即周官九数，系于方圆者，为叀术，皆曰外算，对内而言也。其用相同，不可歧二。"这就是说，按照秦九韶的观点，这事实上都可被看成"算学"的一个部分，不过筹算即算数事物（现代称之为古代数学）可以被称为"外算"，至于占星术的"缀术"、占卜用的太乙、六壬和遁甲的神秘解释形式则可称为"内算"。

然而，从总体上说，古代数学在中国并未成为一种宇宙解释系统，勿宁说，其主要地即是在龟卜和筮法这一神秘解释形式的历史演变中发挥了重要的作用。例如，由历史的考察可以发现，龟卜在殷商时期比较兴盛，但殷商以后，龟卜渐衰，筮法却比较兴盛。这就是说，这两者有一个此消彼长的变化，也即是由平行的发展而逐渐演化为筮法占有主导的地位。对这种现象进行分析，我们认为，原始数学在参与解释世界中所具有的超越其他解释形式的优越性或许就是造成上述现象的一个重要原因。因为，第一，数学表现的形式易于掌握且有规律可循，从而对形成系统的解释就有内在的构造作用；第二，原始数学所具有的神秘性会在数学运演的规律化过程中得到强化和放大；相比之下，用龟占的"象"来解释宇宙万物的形式随意性大，很难形成一种规律化体系，而且没有固定的有说服力的操作形式。从而，按照"用进废退"的进化原则，龟占被筮法淘汰在中国文化的历史进程中就只是一个时间的问题。

另外，如果说古希腊用数学解释世界的起源归于毕达哥拉斯，那么，中国用竹棍体系解释世界的功劳则应

归于孔子：正是由于孔子的极力推崇和宣扬，由竹棍运演体系形成的《周易》（也称《易经》）才正式成为中国文化中一种宇宙万物的解释系统，而这种竹棍的摆排、操作则又正是源于原始数学——竹棍的运算。

现代的历史研究已经表明，《周易》并非一人一时之作，它既保存了殷周时代的占卜成果，又在春秋战国时期得到了整理和发展，尤其是经过了以孔子为代表的儒家学派的认真整理。《史记·孔子世家》中说，孔子"晚而喜《易》，读《易》纬编三绝"。事实上，孔子及其弟子对《易经》研究写成的《易传》已经成为《周易》的有机组成部分，而《周易》则又经过儒学家的不懈努力最终成为了中国文化中宇宙万物的解释体系：《周易》的64卦模式再加之阴阳、五行的学说构成了中国文化带有自然哲学思辨色彩的宇宙万物的理性解释形式。

在此要强调的是，在下述的意义上，《周易》也可被看成中国文化中的原始数学神秘解释体系：它具有与算筹一样的操作工具和表现形式，具有原始的数学神秘作用，并具有运用数字解释宇宙万物的功能。

具体地说，正如前面所已指出的，对于筮法与古代数学使用同一种操作工具和表现符号，中国象形文字的演化过程已经提供了直接的证据；除此以外，我们也可对阳爻［——］和阴爻［— —］这两个符号作出直接的数学解释。[1]

其次，所谓《周易》具有原始的数学神秘作用，是

---

[1] 王宪昌：《数学与人类文明》，第79～86页，延边，延边大学出版社，1989。

指《易经》中的八卦形式，不仅用了中国数字“三”所具有的“集合性”、“整体性”等原始神秘特性，而且，就如《系辞传上》所说，“天一、地二、天三、地四、天五、地六、天七、地八、天九、地十。天数五，地数五，五位相得而各有合。天数二十五，地数三十，凡天地之数五十有五。此所以成变化而行鬼神也。”显然，在此我们清楚地看到依据原始文化而形成的数字神秘性的力量。

第三，所谓《周易》用数字解释宇宙万物的功能，是指《周易》形成了一种“象数”的特殊现象：它不仅以卦象，而且以象数为内容对宇宙万物给出解释。《系辞传上》说：“参伍以变，错综其数。通其变，遂成天地之文。极其数，遂定天下之象。”这就是说，在揲蓍求卦的过程中，由筮而得出的数是十分重要的。《左传·僖公十五年》中说：“筮，数也。物生而后有象，象而后有滋，滋而后有数。”当然，这事实上也就更为清楚地表明了《周易》的揲蓍之法与古代数学内在的渊源。

综上可见，在《周易》这一中国文化中的理性思辨和宇宙万物解释体系的形成过程中，原始的数学神秘主义（这是借用竹棍这一形式得以直接表现的）和蓍草（竹棍）的运演形式发挥了十分重要的作用。也正是在这样的意义上，我们就可以说，中国与古希腊这两个没有形成以宗教为主导的文化解释模式的民族都运用了数学的解释力量。但是，由于《周易》是一个64卦的封闭运演体系，因此，尽管其中用到了“象数”这一直接源于数学神秘主义的解释方式，所说的封闭性却又决定了其

最终必定要与古代数学的筹算形式完全分离开来。而且，由于《周易》作为儒家学说的六艺之首，逐渐成为中国两千年以来的文化解释与理性模式，因此，在中国文化的发展过程中，原始数学的双重功能被完全分离开来了：神秘解释功能归于《周易》，数量计算功能则归于筹算。也正因为此，尽管中国原始的竹棍数学没有能形成像古希腊欧氏几何那样的理性解释模式，但却发展成了一个独立的竹棍运演体系的计算应用模式，一种以实践应用功能为主的筹算数学。

如果说《几何原本》集中地体现了古希腊的数学传统，那么，中国古代特有的数学传统就在《九章算术》中有着典型的表现。

《九章算术》的确切写作与起始年代已不可考。作为中国古代数学的集大成者，这一著作应当说经历了许多不同年代的修改和补充，才逐渐成为一种模式。现有的考证表明，大约在汉代，张苍（约公元前200年）和耿寿昌（约公元前50年）就曾先后对《九章算术》进行过整理（1984年湖北张家山汉墓出土的西汉竹简《算数书》为此提供了佐证）。另外，现在传世的《九章算术》则是三国时期的数学家刘徽所注释（公元263年）的版本。

《九章算术》以方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股共九个类型的实践应用性问题分成九章。每一个具体问题提出后，给出答案，在相同的一类问题上用“术”的形式给出具体的算法。全书共计246个问题，全书共给出202个具体的计算方法——“术”。

数字“九”在中国文化中有着特殊的寓意，表示最多、最大、至尊的含义。刘徽在《九章算术》的注释序中说：“按周公制礼而有九数，九数之流，则《九章》是矣。”由此可见，《九章算术》这一名称的由来也具有中国文化的一种内涵。

《九章算术》的内容可概括如下：[①]

章次	章名	题数	术数	主　要　内　容	重要的术
1	方田	38	21	平面形田地面积的计算问题与计算面积有关的分数四则运算。	割圆术
2	粟米	46	33	计算各种粮食兑换问题；砖、竹、漆、丝、布等生产、生活资料的买卖问题；比例问题。	今有术
3	衰分	20	22	按一定比例进行分配的问题：按等级制分配物品、税收、罚款、计工、贷款利息，粮食买卖等。	衰分术
4	少广	24	16	已知矩形田面积及一边求另一边；关于正方形、圆形、立方体、球体等求积问题。（开启了中国古代解一元高次方程的先河。）	开方术

① 王鸿钧：《中国古代数学思想方法》，第36～37页，南京，江苏教育出版社，1989。

章次	章名	题数	术数	主　要　内　容	重要的术
5	商功	28	24	土方工程的计算。关于筑城、开渠、开运河、修堤坝、建粮仓等的应用问题。给出多种立体体积的求积算法。（开创了中国古代数学中独特的数学证明方法）	阳马术
6	均输	28	28	关于“均输平准”政策——当时按各地区人口多少、路途远近、生产的粮食种类、交纳实物或摊派徭役的计算方法。	均输术
7	盈不足	20	17	引出和运用“盈不足术”的应用问题，是一种常用数学模型。	盈不足术
8	方程	18	19	列线性方程组解的有关应用问题。利用算筹摆法来解线性方程组，实际上相当于现在利用线性方程组系数增广矩阵变换的方法。	方程术
9	勾股	24	22	利用勾股定理来求解的应用问题，开创直角三角形相似法进行测量计算，解决了关于高度、深度和广度的各种测量计算问题	勾股术

《九章算术》及其刘徽注释，是中国古代数学的典范，它总结了历史上积累下来的数学知识和方法，并进行了有目的分类整理，同时对筹算竹棍运演排列的操作性方法给出了具体的程序，用“术”的形式给出了方法模式。刘徽的注释更对当时《九章算术》中记载的内容、方法给予了令人信服的详尽论证。

《九章算术》及其刘徽注释对中国古代分式运演的方法、开方的筹算运演方法、正负数的筹算运演方法、割圆术的极限思想方法、方程筹算解法等一系列内容都给出了“析理以辞，解体用图”这一中国特有的证明论述。这些方法、理论及独特的论证方式表现了中国文化系统中数学的独特的文化内涵。

在中国古代数学的发展中，筹算的方法，即用竹棍作为数学符号、作为运演操作的工具是中国古代文化对人类数学的一个独特贡献。这种筹算的操作方式和运演程序表现了中国古代数学的极大创造性。这种运演操作不仅可以进行加、减、乘、除、开方、开立方的运算，而且在方程的运算方面更达到了令人惊奇的地步，后者与现代数学中方程理论的矩阵解法有极大的相似之处。例如，《九章算术》第八卷“方程卷”中的第七题：今有牛五、羊二，直金十两。牛二、羊五，直金八两。问牛羊各直金几何？按刘徽所给出的注文，相当于以下用算筹摆排运演的方法：[①]

---

① 李继闵：《〈九章算术〉及其刘徽注研究》，第214～215页，西安，陕西人民教育出版社，1990。

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 2\\8 & 10\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{互乘}]{}\begin{bmatrix}10 & 10\\25 & 4\\40 & 20\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{相消}]{}\begin{bmatrix} & 10\\21 & 4\\20 & 20\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{约简}]{}\begin{bmatrix} & 5\\21 & 2\\20 & 20\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{互乘}]{}\begin{bmatrix} & 105\\42 & 42\\40 & 210\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{相消}]{}\begin{bmatrix} & 10\\42 & \\40 & 170\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{遍约}]{}\begin{bmatrix} & 1\\1 & \\20/21 & 24/21\end{bmatrix}$$

这一解法相当于求解二元一次方程组的矩阵消元法。刘徽在题后的注释中曾指出："以小推大，虽四、五行不异也。"这就是说，这种消去法也可用以求解多元的行数更多的"方程（组）"。由数学史我们知道，西方数学中的行列式、矩阵是18世纪至19世纪开始发展形成的；但是，筹算这种特殊的手工操作运演，却以一种独特的方式表示了表格式、形式化的运算，从而就具有与现代数学矩阵初等变换极为相似的特征。由此我们也就可以理解筹算运演方法本身的创意性及其独特的理论形式。至于在解决乘、除、乘方及开方等运演中，筹算都创造出了自己的方法。

在中国古代数学的发展中，筹算数学遇到的另一个问题就是如何对待圆的面积。中国古代数学不是像古希腊数学那样从表述世界美好和谐的意义来看待圆及其面积，而只是基于实践应用的需要来求取圆形的面积。在《九章算术》第一卷"方田卷"中，刘徽在第三十二题的注释中给出割圆术并论述了圆周率（157/50）的求取过程。作为实践应用技艺的中国筹算数学，刘徽在此体现了实用的准则：他以图形来说明割圆术的方法，并用割圆术通过圆内接正多边形变得最终与圆重合的方法来论

证圆的面积。在割圆术中，没有对无穷小的极限问题作过多考虑。刘徽指出："割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。"从而，这一曾引起古希腊数学家高度关注、并用"穷竭法"回避的问题，在中国古代数学中就只是在应用的意义上得到了处理，也即是用直观的形式忽略了分割中出现的无穷小问题，因为，在操作分割的直观意义上，只要内接多边形作得"弥细"，就会有一步"与圆合体"。一般地说，西方数学中那种带有表述宇宙万物意义的内容、概念及方法在中国筹算数学中大都被轻视、忽略了，因为实践应用才是筹算的根本目的。

在中国古代数学的发展中，筹算实践应用的特征使其很自然地涉及到了实际经济交往中的"余"和"不足"的问题。后者就可看成负数概念的生活实践原型。《九章算术》中给出了正负数运演的一整套法则。这就是所谓的"正负术"。《九章算术》第八卷"方程卷"的第三题记载道：

正负术曰：同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之。其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之。

这里前一句说当两数作减法时，如果是同号则绝对值相减，如果是异号则应当绝对值相加（同名相除，异名相益）；当正数被零减时为负数，负数被零减时为正数（正无入负之，负无入正之）。后面一句说，当两数作加法运算时，同号则绝对值相加，异号则绝对值相减；正数加零为正数，负数加零为负数。从而，这就是与现代关于有

理数的运算法则完全一致的。另外，刘徽在正负术的注文中并明确给出了正负数的定义及表示方法。他写道："今两算得失相反，要令正负以名之。正算赤，负算黑。否则以邪正为异。"这里由运算规则得到的正负数被定义为加负等于减正，减正等于加负。正负数的表示方法（符号形式）则有两种：其一用红筹表示正数，用黑筹表示负数；其二以正、斜摆放的排列方式分别表示正数与负数。

与西方数学比较，中国古代数学对负数的认识和运算表现得极为自然并与经济生活相同步，而西方对负数的认识则是很晚之后的事情，因为数在古希腊文化中有特殊的理性意义，所以负数就被这种理性深深地掩盖起来了。与此相反，由于中国的筹算没有肩负这种文化理性的重任，而只是对实践应用的结果负责，因此就很自然地对生产和生活中的"亏损"和"不足"等现象给出筹算上的表示和具体可操作的运演规则。

在中国古代数学的发展中，虽然它不像古希腊文化那样用几何图形来构造世界，但是社会实践应用也必然会提出一些有关几何图形的面积和体积的计算问题。对这些问题，筹算只关注它们的实际应用而并非逻辑推论过程的形式化，它所关心的只是如何把几何图形化为便于计算的图形，并以筹算的方式给出体积和面积的计算结果。具体地说，中国古代数学采用一种独特的以割补图形计算面积和体积的方式。对这种方法，刘徽曾以"出入相补"的形式加以论证说明，也即通过把图形切割、拼凑成简单已知的可计算的面积图形，然后再运用

筹算获得所需的结果。

例如，《九章算术》卷一“方田卷”第二十五题：今有圭田广十二步，正从二十一步，问为田几何？

术曰：半广以乘正从。

刘徽注云：“半广者，以盈补虚为直田也。亦可半正从以乘广。按半广乘从，以取中平之数。故广从相乘为积步。亩法除之，即得也。”

这里“圭田”指三角形的田地，“正从”为三角形底边上的高，“广”是底边。注文中所说的“以盈补虚”就是刘徽的“出入相补”法。可见图6。①

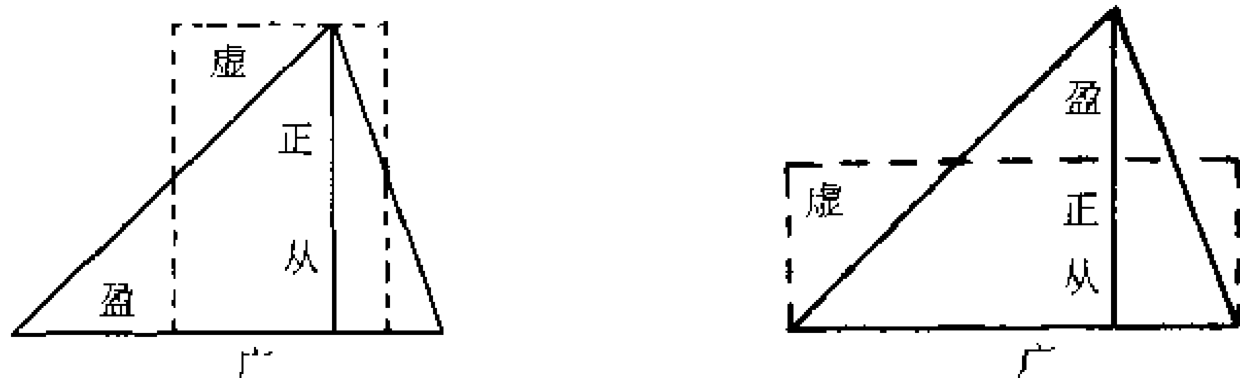


图6

另外，《九章算术》第五卷“商功卷”中共给出立方、堑堵、阳马、方亭等20个名目12种多面体的计算公式。这里既有立方体、截面为正方形的长方体，也包括其他一些多面体。在这些体积计算中，中国古代数学不仅创造出相应的概念和具体的算法，并都给出了“出入

① 李继闵：《〈九章算术〉及其刘徽注研究》，第242页，西安，陕西人民教育社，1990。

相补”方法的论证（刘徽注）。[1] 一般地说，刘徽在许多地方，如开平方、开立方以及解二次方程中都运用了“出入相补”的方法。从而，以筹算的运演操作为主的中国古代数学，通过以直观图形的变化来论证其结果的可靠性，事实上已经寻找到了解决几何图形面积、体积的规范方法；只不过这种方法没有像古希腊数学那样经过逻辑演绎方式的理性锤炼。当然，中国文化并不要求筹算及数学家进行这种“多余”的工作，因为只要结果与实践的要求相一致，中国文化就对筹算亮起了绿灯。

在中国古代数学的发展中，筹算所发展和构成的思维方式与古希腊数学的逻辑演绎思维方式有着完全不同的形式。筹算数学的实践应用性要求使其充分发展和应用了人类在解决数学问题时所可能使用的各种思维方式，包括归纳、类比、直觉想象、灵感等。《九章算术》中所给出的各种筹算运演规则，如今有术、齐同术、开方术、方程术、割圆术、更相减损术等，都表现为一种“程序”性的法则。这些方法显然不是建立在概念、命题的逻辑体系之上，而是建立在一种以筹算操作形式之上“类推衍化”的类比、归纳之上。从而，总的来说，这就正如袁晓明先生所指出的：“中国数学不是建立在逻辑基础上的概念思维学说，自然在方法上也就具有更多的灵活性，没有必要为遵循逻辑原则而拒绝接受各式各样的新方法。”[2]

综上可见，《九章算术》所体现的中国古代数学的符

---

① 刘纯：《大哉言数》，第371～375页，沈阳，辽宁教育出版社，1995。
② 袁晓明：《数学思想史导论》，第148页，南宁，广西教育出版社，1991。

号形式、运演操作形式、解决问题的类型和构造体系的方法，事实上是中国文化这样一种特定的文化系统对自己数学形式的选择。这就是说，即如古希腊选择《几何原本》一样，中国文化的这种选择也使中国古代数学按照所选定的方式、方法和目标去发展，而与文化选择相异的方法、形式等则就被历史慢慢地淘汰或被历史所淡化、冷落。

例如，在此应当特别提及的是，在中国的历史上，墨子的学说（公元前468～公元前376）就表现了与儒家学说不同的另一种观念和倾向，特别是，流传下来的《墨经》更表现了一种关于物质世界和逻辑问题的思辨。例如，在《经说上》可以看到以下的记载：

关于空间形状的论述：

〔经〕圆，一中同长也。〔说〕圆规，写支也。

〔经〕方，柱隅四灌也。〔说〕方，矩见支也。

关于空间性质则有：

〔经〕平，同高也。

〔经〕同长，长正相尽也。

〔经〕端，体之无厚而最前者也。〔说〕端，是无间也。

〔经〕中，同长也。〔说〕心，中，自是往相若也。

〔经〕有间，中也。

〔经〕间，不及旁也。

另外，《经下》、《经说下》则还包括了直线传播、小孔成像等物理方面的问题。但是，由于在秦汉之后儒家学说逐渐取得了中国文化的主导地位，“罢黜百家，独尊

儒术"，这就使得墨家有关空间几何问题和物理问题方面的思考成为绝学，而没有能反映到筹算的实践应用中来。

在中国文化中，自汉代以后，《周易》作为解释世界的宇宙学说的地位得到了强化，筹算的实践应用地位也得到了完全的文化界定：筹算作为一门"技艺"完全成为一种实践应用的技能，成为《周易》理性解释意义之下的"应用九数"。例如，这一现象在刘徽为《九章算术》作注时所写的序言中也可清楚地看出。刘徽写道："昔在包牺氏始画八卦，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术以合之爻之变。暨于黄帝神而化之，引而伸之，于是建历纪，协律吕，用稽道原，然后两仪四象精微之气可得而效焉。记称隶首作数，其详未之闻也。按周公制礼而有九数，九数之流，则《九章》是矣。……当今好之者寡，故世虽多通才达学，而未必能综于此耳。"

刘徽在这里清楚地表明了九数作为六爻理性解释意义之下的应用性地位，同时也表明当时社会的许多"通才达学"并不把数学当成重要的一回事。这种文化现象足以表明数学在中国文化和古希腊文化中的地位实有天壤之别。"纵观中国文化史，数学在中国传统学术中始终只有附庸地位。对中国文化产生重大影响的儒家、道家、佛家、阴阳家都不屑于谈及数学。诸子百家几乎没有一本数学著作流传于世。"① 宋代著名理学家朱熹并曾明确地指出了数学在中国文化中的层次地位，他写道："古人

① 丁石孙等：《数学与教育》，第135页，长沙，湖南教育出版社，1989。

志道据德而游于艺，然九数虽为最末事，若而今行经界，则算法亦是有用。”另外，北齐颜之推的著名《颜氏家训》则更告诫后人：“算术亦是六艺要事，自古儒士论天道，定律历者皆学通之，然可以兼明，不可以专业。”筹算在中国文化中作为一种应用“技术”无法在理性的意义上表现自己、展开自己、构造自己，从而就与古希腊文化中的数学形成了极大的反差。例如，这种反差在宋代沈括——一个被科学史称为中国伽利略式的百科全书式的人物——身上表现得就十分鲜明。沈括兼通工程技术、医学、天文、方志、律历、军事，为博学喜文之士。但他严格遵守儒家关于九数之流皆为技艺的古训，把他自己创造的可在中国古代数学史上占一席之地的“隙积术和会圆术”放在他的《梦溪笔谈》的卷十八的技艺篇，即与造弓有术、活版印刷、中医灸艾、散笔作书等排列在一起。由此可见，筹算在中国儒家文化中的实践应用地位是多么的根深蒂固！

《九章算术》集中地体现了中国古代数学的特征，它的方法、构造形式、解决问题的范畴成为中国古代数学的典范，后世的许多数学研究甚至连书名都与《九章算术》相近。例如，宋元时期著名数学家秦九韶的数学著作就起名为《数书九章》。后世的数学家如刘徽、祖冲之等人对圆与球的研究，王孝通、刘益、贾宪、秦九韶、李冶等人对高次方程数值解法的探索，宋元数学家对垛积术的研究及清代数学家对无穷幂级数的研究等，也都可以从《九章算术》中找到渊源。“从西汉初以迄清末，《九章算术》成为中算家这一跨时空的科学共同体的主要

学术规范和一种富有生命力的研究传统。它不但为中算家准备了统一的语汇辞典和著作体例，而且还提供了多种多样富有启发意义的思维模型。……正是由于《九章算术》示范作用的有效及研究传统的相对强固，中国古代数学中似乎未曾产生过足以摇撼其根基的挑战，当然也就不曾出现数学观念和方法的剧烈变革，即使际逢发展高峰期的宋元数学也是如此。"[1]

特殊地，中国筹算经世致用的“末技”地位，并就决定了它在中国文化中存在、传播和使用的特定群体，而这种受文化价值观念左右的社会群体对筹算的学习、应用和传播也最终确定了筹算发展的方向。

具体地说，由于儒家教育的经学中不开设数学内容，使历代的仕大夫阶层很少有人精通数学。隋、唐两朝虽然科举取士，但算学历来地位低而人数少。据《旧唐书·职官志》载，唐代国子监虽设算学博士，但官位最低，而且算学科还时兴时废，经费和官员都无法得到可靠保障。在这种文化系统中，数学的价值无法得到社会上层人士——仕大夫阶层的承认，当然也就不可能获得社会的激励推动。因此在中国文化中逐渐形成了这样的现象："后世数则委商贾贩鬻辈，学士大夫耻言之，皆以为不足学，故传者鲜。"

事实上，中国的数学只在少数的仕大夫中得到了保留，如董仲舒、李淳风、一行（唐高僧）、贾宪、沈括、郭守敬（元天文学家）等。但即使在这个为数很少的仕

① 刘纯：《大哉言数》，第437~438页，沈阳，辽宁教育出版社，1995。

大夫群体中，对筹算的学习也只是为了应用，他们并没有从事过关于数学概念、方法及构造的理论思考与研究。

中国古代数学实际上主要保留、传播于作为技艺应用的群体之中，如丈量土地、建筑房屋、商贩交易、税收、运输等；另一个方面是修改历法，但在这方面数学也只是计算工具，而不是像古希腊那样从数学的构造、数学的规律去建立天文学的理论。由于所说意义上的数学很难得到官学的稳定正规教育，因此，中国古代数学在民间的传播及在历法中的应用大都是通过私学——师傅带徒弟式的教育——世代承袭相传。这一点与古希腊的数学教育也截然不同，古希腊把数学作为贵族的智力、理性思维和真理形式的教育而把实用教育看做低级世俗的。研究表明，中国古代受过官学中数学教育及考试及格的人没有一个在数学上有所造诣，唐宋的著名数学家没有一位是官学中数学教育培养出来的。①

中国古代数学技艺性的文化价值观，以及它保留、传播和应用的极少数仕大夫群体和多数的社会实用的技艺群体，使中国筹算的发展形成了两种独特的发展趋势。

(1) 任何一种数学传统一旦得以形成，特别是具有了确定的方法和构造模式，就获得了一定的自主性或独立性，即其自身会在一定程度上产生引导数学家前进的动力，特别是，数学作为概念、方法和理论所存在的有待于进一步研究和解决的问题就会促使数学家深入地去进行研究。就中国古代而言，这就是指，筹算会发展自

① 丁石孙等：《数学与教育》，第15页，长沙，湖南教育出版社，1989。

身的概念、方法、构造形式和解决问题的难度。然而，由于实用性始终是决定中国古代数学发展的主要因素，因此，从总体上说，上述这种源自数学内部的发展就只可能在局部的范围、并在一定的限度内得以实现。另外，同样重要的是，就这种发展的具体实现而言，则又取决于数学能否成功地吸引住社会中“精英”分子，因为归根结底地说，只有借助于各个数学家的具体努力，所说的数学发展才可能得以实现。也正是从后一角度去分析，笔者以为，这也就是中国古代出现以下现象的一个重要原因，即数学在封建社会经济、技术相对稳定的状态下进步甚微，而在战乱年代却表现出创造性的发展。

具体地说，当社会的经济、技术相对稳定时，社会进步缓慢，以《九章算术》为代表的中国古代数学基本上适应社会的需要，因此数学的发展变化不大。此时惟一给数学以活力的只是历法方面对数学的应用。与此相对照，当社会动荡、改朝换代时，由于此时仕大夫阶层无法按传统的价值观实现人生的目标，也即无法实现“学而优则仕”的发展道路，于是就转向“出世”的宗教或其他方向以表现自己的价值或避世赋闲，此时，数学以其自身在技艺应用时留下的问题也就可能吸引一部分文化造诣较高的仕大夫人士。这样，本来是作为技艺应用的筹算，就并非在太平盛世获得了创造性发展，反而是在魏晋南北朝和宋元时代的战乱时期表现出了创造性的高峰。① 特殊地，由于后一部分人不是为了技艺应用去

① 王宪昌：“文化价值观与宋元数学”，载《大自然探索》，1995年，第一期。

从事数学研究的，从而就在理性的意义上超越了儒家所限定的数学价值观念。例如，宋元时期的大数学家秦九韶是南宋小官，战乱使其仕途受阻，他在《数书九章》自序中说："际时狄患，历岁遥塞，不意全地矢石间。尝险罹忧，荏苒十祀，心槁气落。信知夫物莫有数也，乃肆意其间，旁取方能，探索查渺，粗若有所得焉……则数与道非二本也。"这就是说，秦九韶由于战乱官场失意而"肆意"于数学之间，并发现数学与"道"的本质是一样的。宋元时期的另一位大数学家李冶的情况与秦九韶也极为相似，蒙军攻击金朝使其官场失意，而他却正是在流亡生涯中完成了自己的数学创造。李冶在他的《测圆海镜》中这样写道："既已名之数矣，则又何为而不可穷也？故谓数为难穷，斯可；谓数为不可穷，斯不可。何则？彼其冥冥之中，固有昭昭者存。夫昭昭者，其自然之数也；非自然之数，其自然之理也。……苟能推自然之理，以明自然之数，则虽远而乾端坤倪，幽而神情鬼状，未有不合矣。……由技兼于事者言之，夷之礼，夔之乐，亦不免为一技；由技进乎道者言之，石之斤，扁之轮，非圣人之所与乎。"在李冶的观念中，数学可以表述乾坤变化、神情鬼状，而且数学作为技艺也同圣人的礼、乐所相近。由此可见，秦九韶、李冶都已突破数学的技艺价值观，并上升到了数学作为一种道、作为一种礼、乐的形而上意义的理性观念。秦九韶、李冶等数学家是在太平盛世所不可能出现的仕大夫阶层的数学家；当然，所说的太平盛世也不可能容忍这种违背儒家价值观念的非技艺的数学价值观。

也正由于在所说的特定时期，在某些仕大夫人士那里数学是作为一种理性创造得到研究的，因此，筹算也就可能通过人为地编造一些并不具有实际意义、但却具有较大难度的问题得到研究和发展。但是，如果这种发展得不到文化系统中价值观念、人才资源的必要支持，也始终缺乏实践应用的支持，那么，其最终就会成为极少数人的“数学游戏”，并被历史所逐渐遗忘。

综上可见，明确筹算在中国文化系统中的价值取向，就可以帮助我们更好地去理解为什么作为一种技艺的数学不在技艺应用的太平盛世得到发展，而偏偏在战乱时期得以创新。数学的发展不会都是战乱的产物；但是，特定的文化氛围、价值观念、人才条件和形而上的追求，却使筹算在战乱之时得到了一个不符合中国古代数学正常演化轨迹的奇异性发展。当然，如果我们因此而把这种奇异性的发展看做中国古代数学的必然规律，那就违背了中国文化中筹算的价值取向，也即是把筹算错误看做了西方的形而上意义的理性构造的数学。[1]

(2) 筹算作为中国文化系统中的技艺应用系统，必然最终演化为一种计量应用的实用工具。这就是说，筹算的竹棍排摆运演形式必然会在社会实践应用的压力和文化价值的经世致用的技艺观念引导下，发展成为一种更方便、更实用的算法，这就是珠算。

筹算是中国文化中的“技艺”，是单纯性计量运算的“末技”。在中国古代典籍的分类中，就根本没有独立的

---

① 王宪昌：“宋元数学与珠算的比较评价”，载《自然科学史研究》，1997年，第一期。

“算术”或“筹算”这样一门学科。如《汉书·艺文志》中把古代数学著作归类于“术数略”的“历谱”之中;《四库全书总目》则把以《九章算术》为代表的中国古代数学划归到“子部”的“天文算法类”中。作为历法的计算,筹算中所创造的高次方程的数值解法,只有天文学的应用,其使用范围和在中国文化中产生的影响都很有限。从而,总的来说,作为文化中广泛应用的一种技艺,数学就必须与当时社会经济技术的发展相适应,使自己的方法、操作为整个社会的经济技术的应用群体所使用。特殊地,就远古流传下来的竹棍式摆排运演方式而言,这也就需要有一个新的适合经济、技术,尤其是适合明朝社会“商贾贩鬻”群体使用的形式,这就是在筹算时产生并与筹算共存过很长一段时间的珠算。

具体地说,明代商业的发展可被认为是为珠算的普及提供了必要的社会条件。这就正如李迪先生所指出的:“明代珠算的大普及是明代商业贸易发展的结果。那时商业上计算不需要高深的理论,而重复的四则运算则是大量的,珠算正适合于这种需要。因此,珠算的普及具有时代的特征”。[①]

这样,作为一种表示形式和运演的工具,中国筹算的竹棍就逐渐经历了颜色、形式及布筹方式等方面的变化,包括用盘子摆放,进而用圆珠代替竹棍,再用滑道摆放圆珠等,直至最终发展成为方便实用的珠算。这一发展是中国古代数学符号形式和运演方式的巨大改变。

① 李迪:《中国数学史简编》,第222页,沈阳,辽宁人民出版社,1984.

如果与今日的计算机相类比，我们就可以说，即如软件程序的发展，硬件的创新也是计算机技术的巨大进步，同样地，与数学的理论性进步一样，由筹算到珠算恰如硬件的创新也是中国古代数学的一个重要进步。

综上可见，珠算可被看成中国文化中筹算发展的必然归宿。尽管珠算多为"商贾贩鬻"所用，远不如宋元数学来得那么深奥和精湛，但是中国文化的技艺价值观就决定了这一发展的必然性。许多中国数学史的研究者似乎总觉得如果高看了珠算就没法与西方数学相比较，也总感到没法把珠算与宋元数学相比较。其实，数学作为一种文化，那是在特定的文化条件下所创造出来的一种特定模式，它浓缩着整个民族的价值观念，表现了民族文化中宇宙哲学对数学概念、方法、构造的运用，也揭示了其理性观念中数学的地位与层次。从而，作为不同数学传统的比较我们就应十分注意由文化差异所造成的数学概念、方法、结构的差异。显然，从这样的角度去分析，中西数学的差异就是中西文化差异的缩影，而又正如上面的讨论所已表明的，宋元数学与西方数学的差异，筹算与珠算的差异也都可以在所说的文化的意义上得到新的解释。[①]

7.2　比较与思考

鉴于中西古代数学有着不同的内容和方法，并在历史的发展中表现出了不同的取向，因此，作为数学史的

① 王宪昌："筹算数学的基本特征及其评价"，《自然科学史研究》，1998年，第四期。

研究，就有必要对此作出比较与分析，特别是，由于《九章算术》和《几何原本》在中西古代数学的发展中分别起到了典范的作用，因此，我们就应首先对这两部著作作出比较评价。

具体地说，作为对于《九章算术》的评价，目前有两种明显对立的观点。

一种观点认为以《九章算术》为代表的中国古代数学并没有能构成理论体系，过分“重实践的传统使它未能建立起合理化的理论体系。”例如，李约瑟就认为：“中国的数学是很可以和旧大陆其他中世纪的民族在文艺复兴之前的成就相比”，但是，“从实践到纯知识领域的飞跃中，中国数学是未曾参与过的。”[①] 国外其他一些中国数学史学家，如三上义夫、尤什凯维奇等，大多也持有这样的观点。另外，著名的数学家陈省身先生在谈到数学史时也认为：“得于国外的数学经验和有机会看中国数学的书，我觉得中国数学都偏应用，讲的过分一点，甚至可以说中国数学没有纯粹数学，都是应用数学。”[②]

另一种观点则认为中国古代数学以刘徽的《九章算术·注》为代表已经形成了逻辑的构造体系（有的学者还认为已形成了辩证的逻辑体系），后者是一种“最为简单、最为精巧的理论建筑物”。作为中西古代数学的比较研究，有的数学史学者更提出：“古代东、西数学是风格迥异的两种理论体系，如果说西方数学著作表述为逻辑

① 李约瑟：《中国科学技术史》，第三卷，第334、337页，北京，科学出版社，1978。
② 陈省身：《陈省身文集》，第244页，北京，科学出版社，1991。

的演绎体系，那么东方数学则是呈现出计算为中心的算法体系。”①

如何对《九章算术》作出全面、正确的评价，应当说已经超出了本书的范围，然而，笔者在此愿意着重指明以下的事实，即从目前已有的关于《九章算术》的研究结果看，可以发现许多研究过分注重数学形式、逻辑论证和体系结构的分析，而忽略了更为深入的内在比较。与这种作法相反，笔者以为，从文化的角度看，作为《九章算术》和《几何原本》的比较研究，我们应当更加注意以下三个层面的问题：第一，如何正确地揭示数学价值观的差异对数学的形成发展、以及由此演化而成的构造体系的重要影响？第二，如何从上述的角度去认识《九章算术》与《几何原本》的差异并对此作出评价？第三，除去两者的差异以外，什么又是这两者、乃至整个人类古代数学的共同特征？以下我们就对这三个问题作出具体的分析。

首先，前面的论述已经表明，《几何原本》与《九章算术》是在不同的数学价值观念指导下，并是在文化系统的不同层面上得到发展和建构的。具体地说，《几何原本》是在数学作为表现世界、构造世界的基本形式这一价值观念下，展开它的理性意义上构建的。这就使得《几何原本》建立在一种理性论证的基础上，以适应当时文化理性思辨的要求，也即应当是几何的、三段论式的，并表现为完全脱离具体问题的一种逻辑演绎建构。显然，

① 李继闵：《〈九章算术〉及其刘徽注研究》，第33页，西安，陕西人民教育出版社，1990。

这事实上就在很大程度确定了《几何原本》的概念、内容、方法及建构的特征。特殊地，尽管当时也需要用算术解决一些实际应用的经济或技术类的问题，又由于当时已经有了相当发达的商业活动，古希腊必然地也有“商贾贩鬻”一类的实用算术，但由于这些不符合上述的理性思辨要求就都被排斥掉了。实际上，进入《几何原本》第七、八、九三卷的算术内容已变成了纯粹的数论问题，另外，即使是一些算术（代数）的内容，也必须对此作几何的理解，即如把数看做线段、把两个数的乘积看成矩形等。与此相对照，《九章算术》是在中国文化实用技艺的价值观念下展开构成的，因此，作为实用的技艺，对现存的经济、技术问题给出具体的、可运用的方法就是《九章算术》的惟一追求。同时，筹算的竹棍摆排运演不像几何图形那样比较容易获得逻辑论证形式，事实上，就中国古代数学而言，具体几何问题的解决往往是运用经验、直观、类比和计算获得的；而且，几何图形研究中所创造出的各个概念（如阳马、堑堵、鳖臑等）也绝不是为了逻辑演绎而只是为了直观的类比运用。一般地说，对于实用的技艺而言，追求逻辑过程的确定性、演绎性并且创造一些公理、公设、数论命题等一类概念和证明，无疑会被看做是一种无实用意义的游戏。同样地，对实用的技艺而言，种种形而上的有关数、空间的思辨（如先秦墨家对空间的思辨以及庄子对无限的思考等）也会因其无实用意义而被拒之门外。由此可见，非逻辑为主并且运用直观、类比、归纳等思维方式，表现具体问题，并以实用的筹算方法进行分类，数学的概

念与运演方法——“术”——紧密地联系在一起，这些就是《九章算术》的主要特征。

综上可见，正是中西文化不同的数学价值观念最终造成了中西古代数学在概念、方法、构造方面的巨大差异。

其次，如果承认不同的民族文化会对古代数学的创造和发展造成重要的差异，那么，一个必然的结论就是：我们同时也应承认不同的民族文化在古代数学创造中所形成的各种不同的数学形式、方法、构造等都有其内在的合理性。显然，从这样的角度去分析，我们就不应（自觉或不自觉地）把某种特定文化中的数学模式人为地界定为人类古代数学的惟一模式或标准模式，而应明确承认不同文化对古代数学的贡献，并依据这样的立场去进行比较和评价。例如，如果以《几何原本》作为古代数学的模式来比较《九章算术》，就会认为筹算的运演、构造没有形成逻辑的体系，只是一种习题集而不是数学理论；然而，如果把《九章算术》看成人类古代数学的标准模型，并以此来比较评判《几何原本》，那我们就会得出截然相反的结论。当然，这两者应当说都是一种片面的作法。

事实上，从文化的角度看，承认不同文化对古代数学的贡献，而不是以一种文化的价值观念去否定另一种文化的价值观，不是以一种文化价值观下发展起来的数学模式去抹杀另一种文化在数学发展史上的贡献和创造性，即是对不同文化在演化流变中存在意义的确认。这也就是说，如果认为一个民族绝对地高于另一个民族，

一种民族文化形式绝对地高于另一种民族文化，则就从根本上违背了人类文化学的研究原则。一般地说，人类文化是由各个不同的民族文化形成的，人类的古代数学也是由各种不同民族文化中的数学汇集而成的。这种汇集在世界文化不同阶段的交流与碰撞中都发生过积极的意义。例如，在古希腊文化衰落之后的中世纪，东方数学、阿拉伯数学的发展及其后来向欧洲的流传显然就是这种数学汇集、交流及其积极意义的一个佐证。与此相反，如果把不符合《几何原本》这一模式的数学都排斥掉，不承认它们在人类数学史上的地位和贡献，那么，人类的古代数学就不会具有多样性，人类的数学史也就只能是西方数学史，而这当然是一种错误的作法。

由上面的立场去分析，以下的结论显然是十分恰当的："我国的传统数学有它自己的体系和形式，有着它自身发展途径和独到的思想体系，不能以西方数学的模式生搬硬套……从问题而不是从公理出发，以解决问题而不是以推理为宗旨，这与西方以欧几里得几何为代表的所谓演绎体系旨趣迥异，途径亦殊……在数学发展的历史长河中，数学机械化算法体系与数学公理化演绎体系曾多次反复互为消长，交替成为数学发展的主流。"①

具体地说，作为《九章算术》（指刘徽注《九章算术》）与《几何原本》的比较，可以发现以下几个方面的差异：

（1）《几何原本》从公理、公设及概念出发展开理

① 吴文俊："关于研究数学在中国的历史与现状"，载《自然辩证法通讯》，1990年，第四期。

性论证；《九章算术》从实践应用问题出发展开其实际应用。

（2）《几何原本》的运演过程明确地表现为逻辑三段论式的形式；《九章算术》的筹算运演则表现为确定的手工操作程序。

（3）《几何原本》以概念、公理、公设为基础，通过逻辑论证获得数学结果——命题；《九章算术》以具体问题为基础，以“术”——筹算规律获得数学应用问题的解决。《几何原本》的数学命题是在逻辑运演中获得的，而《九章算术》的主要结果“术”则是先从筹算运演规律中获得而后在解决问题中得以应用，尽管后世的注释者试图对此给予更好的论证说明。

（4）《几何原本》的命题运演过程明确表现在文字符号的书写过程之中；《九章算术》的筹算运演只保留结果，相应的运演过程在手工操作后都不复存在。

（5）欧几里得按当时的理性要求分类规划了《几何原本》的结构，并以五种正多面体的论证作为全书的结尾；《九章算术》按解决具体问题的要求分类划分，尽管刘徽努力为先前存在的筹算规则“术”提供令人信服的论证，但其目标仍为实用的可靠性、而不是要在理性或抽象数学（指脱离实用目的）的意义上进行逻辑形式的建构。

第三，作为《九章算术》与《几何原本》的比较研究，除去上述的各种差异以外，我们也应注意两者的共同点，特别是，笔者以为，如果我们能以这些共同特征作为评判和比较中西古代数学的尺度，就可消除或避免

仅以《几何原本》为模式来评价中国古代数学的种种弊病。

具体地说，笔者以为，以下即可看成中西古代数学的一些共同特征，我们并就可以以此来作为评价数学发展程度的一种尺度：

（1）概念方面。数学应当形成脱离具体事物属性、也即具有一定抽象意义的概念，后者并应具有一般意义的指称（如“率”、衰分、盈不足、阳马等）。一般地说，数学概念即就表明了对数学的理解和抽象程度。

（2）运演规则方面。数学应当有明晰的可用以解决问题（无论是理性层面还是应用层面的问题）的运演规则，并足以满足当时社会对数学的要求。运演规则的深化和发展是数学发展的重要表现形式之一。

（3）对数学概念和运演方式的思辨方面。数学的概念与运演方式在相应的文化系统中应当具有令人信服的论述或证明，后者即就构成了人们运用概念和方法的依据。这种对数学概念、运演方式的论述和思辨正是数学走向理性的台阶。

（4）方法论的规范性层面。数学应当具有自己的方法论，也即在方法的层面具有一定的规范性。数学由个别特例的解决方法上升为规范的数学方法的过程是数学发展进步的重要方面。

（5）体系建构方面。数学的体系应当具有确定的意向或目的明确的分类性（无论是理性层面或实用层面）。这种分类的细化、改变亦是数学发展的一个重要方面。

总的来说，笔者以为，作为中西古代数学的比较研

究，我们必须十分注意从文化的角度去进行分析。也正是从这样的角度去认识，我们即可清楚地看到在中国古代数学评价问题上所存在的“错位”现象。

大致地说，中国数学史的研究是在接受了西方数学的教育之后展开的，尤其是中国这样几乎完全西化了的数学教育，就使得西方数学的概念、逻辑形式、思维方法、结构形式以及由此而产生的西方的数学价值观念，不知不觉地成为人们评价古代数学的习惯性标准，特殊地，这也就使得中国数学史的研究在比较和评价的问题上产生了诸多的“错位”现象。

事实上，我们在此还可从更为一般的角度对所说的“错位”现象作出分析。如众所知，在人类的历史进程中，西方资本主义的形成与发展极大地推动了人类社会的进步，使其脱离封建社会而进入到了一个新的发展阶段。在这一过程中，文艺复兴以来诸多思想深刻的哲学家、科学家提出了一系列的新思想、新方法，并且发明创造了前所未有的高度发展的科学技术。然后，西方的文化伴随着西方科学技术迅速地在全世界传播开来，特别是，西方文化的价值观念也几乎成为了全人类共同的价值观念。

特殊地，中国人民从20世纪初脱离封建王朝的统治以来，正是从西方文化看到了自己的前途，百年的奋斗更使中国文化逐渐与西方文化发生了有机的融合。对于科学技术而言，中西文化的交流和融合无疑有着巨大的促进作用；不过在这种交流中，隐藏在科学技术背后的西方的数学价值观念，也为人们所不知不觉地广泛接受

了。

对于西方学者而言，由于自身的背景就很难理解像《九章算术》那样的古代数学怎么可能具有与古希腊数学相同的理论意义，即总是依据西方的数学价值观念、并以《几何原本》的理论模式作为评价标准而判定中国古代数学不能算作理论意义上的数学。也正是在这样的影响下，尽管中国的学者通过深入研究以筹算为代表的中国古代数学，已深切地感受到了其对世界数学的意义以及筹算构成发展的理论形态，但却仍然千方百计地寻找与《几何原本》相似的地方，即是希望能用西方数学的标准为中国古代数学建立起一个理论的名声。但是，这种努力却不知不觉地陷入了悖论之中：从《几何原本》那里“借”来了中国古代数学的“理论”依据；然而，越是强调这些十分勉强的“理论”，却越使人感到这种“理论”的可疑。于是在这种情况下，就出现了目前中国数学史研究中的诸多矛盾现象。

例如，有的学者认为中国古代数学同古希腊数学一样具有严格的逻辑思维，有的学者还从刘徽注的《九章算术》中找到了证据，因为在这些学者看来，没有古希腊式的逻辑运演就不能成为数学理论；但是，也有学者认为“中国数学则是以非逻辑思维为主”的。

有的学者提出“最古老的几何是出自中国”，《墨经》在几何方面完全能与《几何原本》相比；但是，又有学者认为《墨经》与《几何原本》完全不同，因为《墨经》毕竟不是数学专著。

有的学者认为中国古代数学存在着独特的理论体系

(尽管他们没有能指出与古希腊相比的独特的理论标准);但是,大多数西方学者、也包括一些国内学者并不认为中国古代数学构成了"理论体系"。

有的学者认为中国古代数学已经出现了"无理数理论",《墨经》中出现了"本质已与19世纪康托尔'区间套原则'无异"的概念;但是,也有学者认为类似的一些论断只是民族主义情结的一种表现。

正如上面所已指出的,由认真的分析可以看出,在中国古代数学评价问题上表现出来的上述矛盾事实上都可归结为比较评价的"错位"。对于后者我们并可进一步分析如下:①

1. 数学比较评价在价值观念方面的错位。

这种比较评价的错位,是把两种文化系统中不同的数学价值取向,看做是数学的内在规律和发展方向,从而把本应是对数学自身特征的比较评价,不知不觉地转换成了数学价值取向方面的比较评价。例如,古希腊文化(指柏拉图之后)赋予数学的是几何内容的理性层面的构造,从而这种构造就强调了概念、公理、公设及逻辑演绎的确定化过程;与此相反,中国古代文化所赋予数学的是解决具体实用的技术层面的问题,而且运用的是特殊的竹棍式的运演工具。因此,这种数学构造所追求的就是能快速、准确、有效地解答实践中提出的具体问题,中国文化不允许、筹算也不可能去追求脱离实践的概念以及运演方法的逻辑构造。

---

① 王宪昌:"试论中国古代数学的评价准则",载《科学、技术与辩证法》,1995年,第五期。

这种文化所赋予数学的价值取向，应当说并不表明古代数学自身水平的高低，因此我们就不能运用一种文化中形成的数学价值标准来评价具有不同价值取向的古代数学。显然，就中国古代数学的评价而言，这种数学价值观念方面的错位所造成的最大危害就是把《几何原本》的特征——实际是一种文化特征——看做是人类数学形成、发展构成体系的惟一特征。西方的学者即是由于这种数学价值观的错位才否定了中国古代数学在人类数学史上的地位；同样地，也就是由于这种数学价值观的错位，许多中国学者才硬是要在按“技艺”价值取向发展的中国古代数学中找出与《几何原本》相类似的模式，并企图以此来证明中国古代数学在人类数学史上的地位。与上述的作法相反，笔者以为，这应被看成数学史研究必须十分注意的一个问题，即我们应当注意分析由数学价值观念的不同所造成的古代数学的差异，并在人类文化学的基础上公允、客观地比较评价不同民族文化对数学的贡献。

2. 数学理论方面比较评价的错位。

数学理论方面比较评价的错位，是指在古代数学有关理论的比较研究中，把一种文化系统中有关数学体系的追求，看做是人类古代数学的必然途径，也即是把一种文化中的古代数学理论形态，看做是人类古代数学的惟一标准形式。

纵观人类的历史，可以发现数学有一个从古代数学（一般指初等数学阶段）走向近代数学和现代数学的发展过程。正如第一篇中所已指出的，现今人们已对数学有

了比较统一的认识和理解：数学可以被看成自由的理性创造；但是，实践的应用仍在很大程度上影响着它的成长和发展，特别是，数学作为一种科学的语言和表述形式，如果长时间得不到科学的光顾，就会萎缩或枯竭，直到它重新发现科学的应用时才可能再次焕发生机。但是在古代，数学自身的发展、成长及形成体系并没有像今天那样的自我追求，而完全是以当时的文化系统的要求作为自己惟一的发展和成长的方向，因此，对古代数学而言，对没有今天那种清楚的自我意识的古代数学而言，理论的建构就不是数学自身的追求而主要是文化的要求。特殊地，就正是这种文化的追求才形成了《几何原本》的以理性、以表现世界构造为己任的形式；同样地，也正是文化的追求才形成了《九章算术》的以筹算为运演方式的实用技艺的形式。

由此可见，当人们把《几何原本》的概念形式、命题构成方式、逻辑运演形式和按数学内在规律的分类方法作为古代数学的理论标准来比较评价《九章算术》时，实际上就造成了数学理论评价方面的一种错位。与此相反，承认以实践应用为目标而发展起来的筹算体系同样也构成了人类古代数学的一种理论形式，实际上就是对古代数学理论形式多样性的确认，即是承认古代数学在不同文化中会有不同的理论构成形式。

事实上，就西方数学进行考察，我们可以发现微积分作为实用的数学方法出现时同样遭到了普遍的非难，特别是，“无穷小运算”更因其“非理论性”而遭到了严重的指责；但是，微积分的成功不是依靠它的理论性，

而是依靠它在实践中的成功应用。从而，微积分事实上就是在十分强调数学理性构造的文化背景下，仅仅依靠自身的实用性而获得存在的。与此相比较，中国文化中本来就不存在着数学的形而上追求，在这种要求数学按技艺价值取向发展的文化背景中，《九章算术》当然不可能形成《几何原本》那样的理论形式。

综上可见，对于中国古代数学理论形态的分析，实际上是对筹算理论形态的界定和分析，而我们则应以手工操作运演程序构成的规律来说明筹算在人类数学史中的理论地位。与此相反，那种企图在刘徽注文中找到逻辑论证的演绎体系或是在《九章算术》中找到辩证逻辑体系的有关数学理论的努力，应当说都是古代数学理论比较评价错位的表现。正如前面所已指出的，中国古代数学的非理性、非形式逻辑的实用技艺的价值追求，使《九章算术》及刘徽注文中存在多种思维方式。中国古代数学是以非逻辑思维为主，即主要通过直觉、想象、类化、灵感等思维形式来形成概念、发现方法和实现推理的。[①] 因此，我们就不能用逻辑演绎来衡量评价中国古代数学的理论形态。

3．数学比较评价在方法论方面的错位。

所谓古代数学比较评价在方法论方而的错位，是指中国古代数学的比较评价事实上有两个不同的层次，而目前的研究则往往把这两个层次的比较评价混到了一起，从而就形成了方法论方而的错位。

① 袁晓明：《数学思想史导论》，第141页，南宁，广西教育出版社，1991。

具体地说，中国古代数学史的研究事实上存在有这样两个不同的层次：第一层次是历史资料的收集、整理与考证；第二层次则是指对确证的史料与世界数学史进行比较、分析和评价。显然，从方法论的角度看，这两个层次的研究是不应混同或错位的，因为在这两者之间显然存在有研究范畴、时间和评价依据方面的重要差异。

所谓研究范畴的差异，是指第一层次的研究工作是在中国文化的范畴内进行的，而第二个层次的研究则是在世界文化的范畴内进行的；而且，第一层次要解决的是史料的真伪、涵义及在中国文化中的发展状况，而第二层次的研究要解决的则是如何对这些已确证的史实与西方数学的相应发展作出比较和评价。

所谓时间的差异，是指第一层次的研究应把史料放在原来的历史背景下去进行考证，这也就是说，第一层次以历史的时间序列作为研究的时间坐标；与此不同，第二层次的研究则往往把中国古代的数学史料放在世界数学史的现代理论框架内进行分析，也即是以后者作为依据对中国古代数学作出评价，包括中国古代数学在世界数学史中的地位与作用、理论的层次、体系构造的状况等，从而，第二层次的研究所应用的事实上就是现代的时间序列这一时间坐标。

所谓评价依据的差异，是指第一层次的分析考证应用的评价准则是中国古代数学自身发展流变的尺度，也即是以中国古代数学自身的理论构成来评判各个特定史料在中国数学史中的意义；第二层次的比较评价所运用的则是世界数学史研究中关于数学理论的评判标准，并

由此来说明和评价中国某一数学史实在世界数学发展中的地位和它的数学意义。

目前国内的一些数学史研究忽略了这种方法论层次上的差异，而往往把两个层次的研究混淆在一起，即如对第一层次中史料考证的结果不作任何的分析，更不指明相应的评价准则而只是把自己的主观感受或个人理解当作数学史的评判标准，并由此得出主观的判断结果。

在笔者看来，这事实上也就是中国数学史研究中产生许多矛盾结论的一个重要原因。例如，对刘徽在《九章算术》中的求微数，有的学者认为它有理论上的失误，“关上了彻底认识无理数的大门”；而另外的学者则认为刘徽的求微数就是获得无理数的方法。台湾学者李国伟先生对此提出了疑问，他认为：“无理数是经过非常长期的演化才研究建立的概念，因此从中国的某个步骤里，便判定已有‘无理数’的概念，恐怕是有些疏简的举动。我们应该仔细分解概念的内容、层次，才能比较恰当地理解它所达到的程度。”[①] 这一意见是十分中肯的。

另外，应当特别指出的是，数学史第二层次的比较评价，是一种评判的理论标准在先的比较评价研究，因此，如果对所说的理论标准没有作仔细的考察与说明，而只是随意地把对史实的研究一下子变成一种比较评价，那么，由此所得出的结果显然就不可能经受得起理论的检验。

4．数学哲学思辨方面的错位。

---

① 李国伟：“《九章算术》与不可公度”，载《自然辩证法通讯》，1994年，第二期。

古希腊数学乃至今天的西方数学，一直受到哲学的特别关注。事实上，由前面的论述我们已经知道，在西方文化中，数学作为理性本来就是哲学思考宇宙的一个部分，因此，从古希腊开始，数学的概念、方法、命题和结构等就曾受到哲学家的反复考察，这也就是说，西方数学的理论及其标准事实上受到了哲学理论的坚实支持。在数学哲学的层面上，西方数学的模式是具有理论的思考与论述的。特别是，《几何原本》作为古代数学的模式就是西方数学哲学论证的结果。显然，从这样的角度去分析，我们所说的在比较评价时应当先确立古代数学的评价准则，实际上也就是要论证说明西方数学哲学理论所确立的古代数学评判准则是否客观、公允。

相比之下，中国古代数学史的研究，目前主要还局限于注释、考证的层面，很少顾及和论证有关数学哲学的问题。在这样的一种局面下，中国古代数学与古希腊数学的比较评判，实际上就是一种没有哲学理论支持的史实与一种建立在哲学思辨之上的数学模式的比较，其结果也就必然会使人觉得中国的学者要么是从民族主义情结出发，要么是缺乏理论思维，因为中国数学史学者的结论往往带有主观性、随意性。

可以说，中西古代数学在比较评判上的错位，一个重要的原因就在于中国古代数学的研究一直没有展开哲学层面的思考。

具体地说，正如前面的讨论所已表明的，中国古代数学在中国文化中的地位、层次和影响，它与儒家宇宙哲学的关系，筹算构成概念的目的、方法以及筹算运演

规律的意义等，这些问题都已超出了数学内容本身的注释与考证，并实际上进入了对中国古代数学的哲学思辨。然而，由于中国文化历来缺少对数学的哲学思考，同时又由于中国哲学与古代数学的接触点很少，所涉及的问题又很狭窄，更没有能把古代数学作为一个整体去思考它发展流变的规律、特征，因此，对于中国古代数学的比较评价研究来说这就构成了一大障碍，特别是，缺乏哲学层面的思考也使中国古代数学的研究很难与西方数学史理论进行对话。

值得指出的是，近些年来在西方兴起的“拟经验数学观”也已从哲学的层面对中国古代数学史的比较评价提供了有益的启示。例如，作为“拟经验数学观”的主要倡导者，著名数学哲学家、科学哲学家拉卡托斯就曾对《几何原本》与形式化数学理论所体现的数学观提出了强烈的批评。他指出：“按照形式主义的数学观念，数学原没有历史。……形式主义否认了大多数过去公认的数学有资格叫数学，于数学的生长也就不置一辞”。[1] 尽管拉卡托斯的数学哲学并不是为中国古代数学的评价面作出的，但是，他的批评显然表明我们不应以某一种理论作为评价数学理论的惟一标准，进面，中国古代数学的理论体系也必须有一种数学哲学为其张目。

事实是，中国古代数学作为一种惟一强调应用而完全忽略理性建构的数学形式，能在一种文化中长期存在，并为古代人民在人类历史上创造辉煌的华夏文明提供了

① 拉卡托斯：《证明与反驳》，第4页，上海，上海译文出版社，1989。

有力的支持，这无疑是数学哲学应深入思考和研究的一个问题。

最后，我们再从一般的角度对数学文化史研究的特征与意义作一分析。

正如序言中所指出的，对于数学史的研究我们可以作出“内史”与“外史”的区分。一般地说，“研究数学自身的历史发展，属于内史；……用大系统的观点把数学的发展和整个社会的发展联系起来进行研究，属于外史。”①

显然，按照这样的区分，数学文化史的研究即就属于外史的范围；但是，由以上的论述我们又可看出，数学文化史的研究已在一定程度上超出了通常所说的数学史外史的研究范围。

首先，数学文化史的研究与传统数学史研究的区别在于，数学文化史的研究把数学看做一种文化现象，并是在文化传统这种看不见、但又确实存在的系统内研究数学的发展。例如，它从文化传统的意义上说明古希腊为什么回避无穷小概念而使用“穷竭法”，为什么古希腊要把数看做点和线段；同样地，为什么中国筹算偏偏要把有关几何图形的运算转换成筹算的计算而不是相反。

其次，与一般的外史相比，数学文化史更加注重实际从事数学研究的群体（数学共同体）所具有的文化传统观念及其对于数学发展的影响，特别是，数学文化史即应具体指明各种文化系统中的数学价值观念，而这事

① 中外数学简史编写组：《外国数学简史》，第2页，济南，山东教育出版社，1987。

实上也就从一个更深的层次揭示了数学家群体的文化价值追求，也即可以使人们对数学的发展有更为深入的文化意义上的理解。

最后，数学文化史研究与传统外史研究的差异还在于，数学文化史并力图通过不同文化中数学发展过程的具体考察和比较，揭示数学的价值观念、理论状况与数学发展方向等在不同文化中的共同规律和特征，从而为不同数学传统的比较和评价建立一个客观、公允的准则，并为人们更为深入地认识数学的本质提供一种新的视野。

显然，以上的分析事实上也就更为清楚地表明了数学文化史研究的意义。对此我们并可进一步分析如下：

第一，数学文化史的研究清楚地表明了我们确应把数学看成整个人类文化的一个有机成分。特殊地，依据现代人类文化学的研究成果，我们在此并可对中西古代数学在相应文化系统中所处的地位作出如下的进一步分析：

具体地说，对人类文化现在一般都把它划分为这样三个层面（或称三个亚系统）：技术层面、社会层面和思想意识层面。其中，技术层面处于最底层，它由人类所运用的各种手段、技能构成；社会层而是在技术层面之上形成的人际关系，它包括社会、亲缘、经济、伦理、职业等内容；思想意识层面处于最上层，即是建立在技术和社会层面上的神话、传说、哲学、宗教，等等。

显然，按照这样的分析，数学作为一种文化成分在中西古代文化系统中就处于不同的层面：古希腊所代表的西方数学一直处于文化系统的上层，从而影响着整个

民族文化的发展；与此相反，中国古代数学作为技艺则一直处于最下层的技术层面，从而也就不可能发挥出处于文化系统上层的哲学或宗教层面的影响力。

第二，从文化的角度进行分析，也可使我们更好地理解中西古代数学不同表现方法、构造体系的合理性和必然性。这就是指，就数学作为一种文化的社会性意义而言，当整个文化系统的成员都认为数学是一种表现宇宙万物的方式、是一种理性的时候，数学必然按照表现宇宙的方式、表现理性的形式“修饰”、发展和构造自己，例如，这显然就是古希腊数学所实际采取的途径；与此相对照，当中国文化及其社会成员都认为数学是一种技艺、是一种可以计量使用的实用技能时，数学的发展就必然地会使相应的计算更加方便、快捷、并运用当时社会所承认和规定的直观、类比、联想、逻辑、灵感等方法作为自己的依据以获得社会的承认和应用。

更为一般地，我们在此并应明确承认人类数学的多元性，并以此作为比较评价各种数学形式的最终依据。这就是说，作为一种文化，数学必然地会在自己所处的文化层面中不断塑造自己以期与整体性文化系统的发展相协调。由于这种协调表现为数学的概念、方法、构造的演变以及特定的价值取向发展，因此，人类文化的多元性就直接决定了其数学形式的多元性。

第三，数学文化史的研究并为一般文化史的研究提供了有益的启示。

①由于数学在文化系统中层次地位的差异即就决定了数学的思维方式能否对整个文化的思想意识发生重要

的影响，因此，数学文化史的研究事实上就为我们深入研究中西文化中的思维方法、思维类型提供了一条新的途径。具体地说，在古希腊由于数学处于文化系统的最上层，这就使得数学中使用的逻辑思维方式得到极大的发展，并对整个古希腊文化产生了重要的影响；进而，基督教神学与数学在中世纪的结合，更使数学的逻辑思维方式从宗教和哲学的层面影响了整个文化。从而，总的来说，数学的逻辑思维事实上就成为了西方文化中的重要思维方式，特别是，对于定量研究的推崇，对思维的确定性和逻辑性的刻意追求显然就可被看成西方思维模式的重要特点。

与此相反，在中国古代数学并没有能在文化系统的上层对人们的思维方式发挥影响，因此中国古代的思维方法就没有重视和强调逻辑思维。中国古代思维的抽象性特征是由原始思维的表象思维自然而然地发展起来的。表象思维强调不同事物表象间的互相影响、互相作用，中国古代把这种相互影响的思维形式加以抽象化发展从而形成了相互联系的、有机的、辩证的思维方式。如孔子的“仁”与天命的联系、老子哲学中的天地与人的相连、董仲舒的“天人合一”、“人副天数”等，就都是这种思维方式的具体表现，而这显然也就表明了在中国古代非逻辑思维始终占据主导的地位。

②数学文化史的研究并为我们理解中西文化中不同的学科构造方法提供了重要的线索。

具体地说，在人类文明的进程中，各个学科的发展与构造可以说具体地记载了不同文化的前进步伐，特别

是，不同文化中同一学科的比较更可被视为比较文化研究的一个重要内容。由实际的考察可以发现，西方的各个学科几乎都是按照《几何原本》的样式进行整理和理论建设的；与此相比，中国文化中的各个学科却缺乏这样一种建构理论的统一模式。于是有的学者就指责说，中国的古代数学不具有指导其他学科进行理论建构的能力。

但是，由以上的论述我们已经知道，数学对文化系统中各个学科的建构指导能力主要地并不取决于数学自身，而是取决于数学在文化系统中所处的层次。由于中国古代数学作为技艺始终处于文化系统的最下层——实用技能层面，因此，当然也就不可能对其他学科的建设产生重要的影响或发挥直接的指导作用。

作为一个案例，我们在此还可对天文学在古代中国和西方的发展作一简单比较。具体地说，由第五章的论述我们已经知道，西方天文学的进步并不仅仅在于它的计算和观察，更为重要的是它利用数学构造了天文学的理论体系。例如，尽管日心说在创立之初并没有超过地心说的观察证据，但是，它的简洁的数学构造使其在与地心说的比较中占了优势，并使许多人在缺乏观察证据的情况下对此坚信不移。与此相比，中国古代天文学就观察和计算所应用的方法而言，应当说并不比古希腊和中世纪欧洲的天文学逊色，但是，就理论的构造而言，尽管中国古代的天文学具有三种不同的理论构造模型，即盖天说、浑天说和宣夜说，但这些几乎都属于按《周易》的思维方式构造而成的同一体系，特别是，这种按

照相互影响、相互作用的有机宇宙观所构造的天文学理论无法依据数学方面的考察进行比较，从而，中国古代的天文学也就没有能够通过相互竞争取得真正的进步，而是在历史的进程中停滞不前。[①]

综上可见，数学文化史对数学在整体性文化系统中所处的层面、以及由此而产生的作用的分析，为我们深入理解不同的学科构造方法的形成原因提供了重要的线索。

③数学文化史的研究也为我们深入研究民族文化的理性精神提供了重要启示。

一般地说，中国文化的现代发展在很大程度上即可说是一个不断批判自身、并不断地接受新思想、新科学技术的过程，特别是，"五四"时期的新文化运动高举科学、民主的大旗更对以儒家学说为代表的传统文化形成了强烈的冲击；但是，就文化传统、特别是理性精神的改变或重建而言，则又需要经过一个很长的历史过程。

具体地说，构成中国文化理性精神的整体相关性思维方式，在我们走向现代化的过程中必然地会以各种形式不断地表现出来，从而影响民族文化对现代科学思想和理性精神的吸收，特别是，中国文化中的主观感悟、非逻辑的一面即会影响人们对以数学理性精神为底蕴的现代科学理性精神的接受。例如，相信"人有多大胆，地有多高产"，相信"抓革命，促生产"，显然就表明了中国传统文化中非逻辑相关联的特殊理性侧面。

---

① 王宪昌：《数学与人类文明》，第123－129页，延边，延边大学出版社，1989。

与此相对照，以确定性、逻辑过程性、形式构造性为代表的理性精神应当说表现了近代科学思想的主要特征。然而，中国文化在接受西方的科学技术时却没有特别注意到它所代表的西方文化的理性精神；恰恰相反，中国传统文化所固有的特定理性精神往往阻碍了人们对于现代科学思想的深入理解和吸收。

正如前面的论述所已表明的，中西文化对数学的理解以及对于数学思维方法、数学理性精神的应用事实上就是造成中西文化理性差异的一个重要因素。从而，对于中国走向世界、走向现代化而言，我们就应高度重视现代理性精神的培养，而这种培养工作的一个重要方面，就是我们不应把数学仅仅看成是一种知识、一种应用的方法，而应把它当做一种理性思维的方式，一种理性精神。也正是在这样的意义上，我们就可以说，数学文化史的研究即为我们深入认识民族文化中的理性精神与数学教育的文化意义提供了重要的启示。对于后者我们将在第三篇中作出进一步的分析和论述。

第三篇　数学的文化价值

本篇分别从宏观和微观的角度对数学的文化价值进行了分析，即是具体指明了数学对于整个民族理性精神的形成、以及对于人们养成良好思维习惯的重要作用。历史的回顾在这一部分的讨论中也占有重要的地位；然而，从总体上说，笔者所关注的主要是如何更好地去发挥数学的文化价值，特别是，这即为我们进一步改进数学教育提供了直接的启示。

第八章　数学与理性

就一个民族或国家的生存与发展而言，理性精神应当说具有特别的重要性，因为，它集中地体现了人们对于外部的客观世界与自身的总体性看法或基本态度。就西方理性精神的形成和发展而言，数学应当说发挥了十分重要的作用，从而，这就从宏观的角度最为清楚地表明了数学的文化价值。

8.1　西方理性精神的形成和发展

在众多的古代文明中，为什么古希腊文化会受到人们特别的关注？对这个问题当然可以从各个角度去进行分析，然而一个十分重要的原因则显然在于：在人类历史上正是古希腊人首先对自然界采取了一种理性的态度或立场，而这事实上也就是理性精神在人类历史上的最早萌芽。

具体地说，在早于古希腊时代或与之同期的各个古代文明中，人们可以说基本上处于蒙昧无知的状态，特

别是，自然界被认为是混乱、神秘、变化无常和恐怖的，自然界的一切现象、包括人类的命运都由天神所操纵，或者说，即是由天神的喜怒哀乐所直接支配和决定的，这样，除去俯首听命以外，人们就不可能有任何别的选择。与这种原始的愚昧状态相对立，古希腊的智者们对自然界采取了一种全新的态度。这就正如克莱因所指出的："任何值得一提的文明都探索过真理。思索的人们尽管不能，但总是试图去理解复杂多变的自然现象，去解开人类如何定居在这个地球上的谜题，去弄明白人生的目的，去探索人类的归宿。在所有早期的文明中，这些问题的回答都是宗教领袖给出的，并为人们所普遍接受。只有古希腊文明是个例外。""希腊的智者们对自然采取了一种全新的态度。这种态度是理性的、批判性和反宗教的。神学中上帝按其意志创造了人和物质世界的信仰被抛弃了。智者们终于得出了这样的观念：自然是有序的，按完美的设计而恒定地运行着。……这种设计，虽然不为人的行为而影响，却能被人的思维所理解。"克莱因并曾明确地指出，古希腊人之所以能"摒除故弄玄虚、神秘主义和对自然运动的杂乱无章的认识，而代之以可以理解的规律"，其"决定性的一步是数学知识的应用。"①

事实上，古希腊人力图理解自然界在最初只是一种不成功的努力。例如，在古希腊文明的早期，爱奥尼亚学派（公元前6或7世纪）的自然哲学家在世界的本原这

---

① 克莱因：《数学：确定性的丧失》，第1－4页，长沙，湖南科学技术出版社，1997。

一问题上就曾倾注了大量的精力。按亚里士多德的说法，爱奥尼亚宇宙哲学的特征是：无论何时它的信徒问“什么是自然？”他们都立刻将此问题转化为“事物是由什么组成的？”或者“什么是宇宙的基元？”而且，在爱奥尼亚学派的哲学家们看来，自然界诸多事物事实上是由共同的“基元”所组成的，而后者则又或者被归结为某种（或几种）具体的物质，如泰勒士所猜想的水，阿那克西米尼所设想的空气等，或者被归结为一种没有任何内在性质的抽象观念，即如阿那克西曼德所说的“无限者”。但是，无论采取哪一种说法，在理论上又都存在难以克服的困难，因为，如果诸多的事物都是由同一种基元组成的，那么，我们又应如何去对它们之间的差异作出解释呢？由于在此并不存在由均一的原初物质到它所组成的无限丰富的自然界的“任何逻辑途径”，“因此，欧洲自然科学的第一个伟大事业以失败告终了。”[1]

也正是在上述的意义上，毕达哥拉斯学派即可说是在古希腊理性精神的历史发展中前进了一大步，因为，正如第四章中所已指出的，毕达哥拉斯学派由谐音的研究逐步建立起了这样的信念：数学构成了一切事物和现象的本质。特殊地，这也就使得人们有可能对爱奥尼亚学派所面临的难题作出回答。这就是指，事物的差异可以被归结为数学上的差异，也即只是一种结构形式上的差异，而并非构成物质的差异。

正由于毕达哥拉斯学派以自己关于谐音的成功研究

① 柯林武德：《自然的观念》，第45页，北京，华夏出版社，1990。

作为哲学研究的直接出发点，因此，这事实上也就为人们牢固地建立以下的认识提供了必要的信心："自然界是有规律的，这种规律也是可以为人们所认识的"；另外，其关于"万物皆数"的根本主张则更为人们指明了具体的努力方向：我们即可通过数学的研究来揭示自然界的规律，或者说，数学即是为人类提供了打开自然界奥秘的钥匙。

就如第四章中所已提及的，毕达哥拉斯学派关于数量关系构成了一切事物和现象的本质的信念在柏拉图那里又得到了进一步的强化。具体地说，按照柏拉图的观念，我们在此必须对真实的"理念世界"与作为其不完善摹本的"现实世界"加以明确区分；另外，由于数学中所处理的都是理想的事物，因此，这事实上就为我们超越现实世界并获得关于理念世界的真正知识提供了一条合适的途径。这也就如克莱因所指出的："数学就为心灵做好了思考更高级思维形式的准备。通过使心灵抛弃对可感知和易逝事物的思考，而转向对永恒事物的沉思，这样数学就净化了心灵。这种超度的方式，通过数学达到了对真、善、美的理解，并进而接近上帝。"① 事实上，在柏拉图看来，上帝就是一个几何学家，或者说，上帝即是按照几何的模式来创造世界的，从而，我们自然也就可以通过数学的研究来认识世界。

一般地说，上述关于数量关系构成了一切事物和现象本质的认识即可被称为所谓的"毕达哥拉斯－柏拉图

① 克莱因：《西方文化中的数学》，第33页，台北，九章出版社，1995。

传统”，而由西方文明的实际考察我们又可看出，这一传统曾在西方社会中长期占据了主导的地位，特别是，一些曾在近代自然科学的形成过程中发挥重要作用的科学家，如哥白尼、开普勒、伽利略、笛卡尔、惠更斯和牛顿等，事实上都处于这一传统之中，因为，他们的工作目标都是确立定量的数学上的规律，也即努力地去揭示自然界的数学设计方案。当然，科学的成功反过来又进一步强化了这样的信念，即自然界是有规律的，而且，我们可以借助数学获得关于这些规律的认识。

例如，由笔者的亲身体验，以下的事实虽然十分简单，只需通过简单的实验就可实际地加以检验：光线由镜面反射时，光线的入射角恰好等于反射角（图7）；但是，由于几何中已经证明了这一路线是最短的（准确地说，这就是指，如果点 A 与点 B 位于直线 l 的同一侧，那么，在由直线上任一点 Q 与 A、B 两点连结所成的诸多折线 AQB 中，以折线 APB 为最短，其中点 P 满足 $\angle APM = \angle BPN$），因此，这无疑就会使人产生这样的信念，即自然界确实是按照数学法则设计而成的。

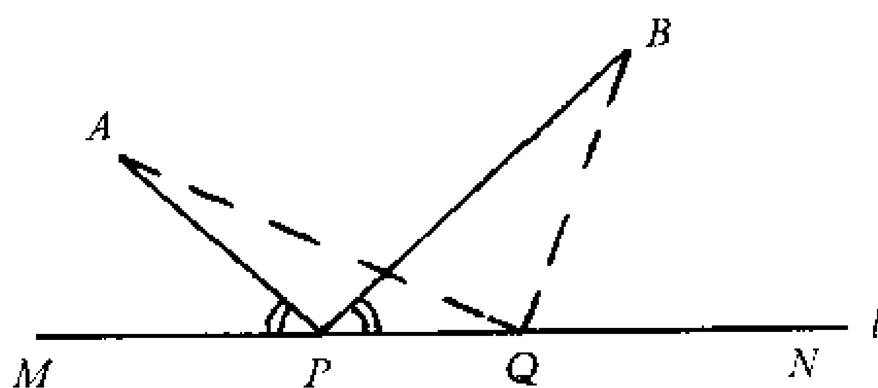


图7

从而，总的来说，就西方社会而言，在所说的理性精神与数学之间我们就可看到一种相互促进、互相强化的共生现象，而这当然也就最为清楚地表明了数学对于理性精神的形成和发展有着十分重要的作用。

事实上，除去上述的相互促进、互相强化的现象以外（对此在下面还将作出进一步的论述），在历史上我们还可看到另一种截然相反的情况：在中世纪的黑暗年代中，理性精神与数学在欧洲同时陷入了困境，并表现出了发展的停顿、甚至是倒退。显然，就本节的论题而言，这即是从反面同样表明了在理性精神与数学之间确实存在有相互制约、互相影响的密切联系。

具体地说，正如第四章中所已指出的，中世纪的欧洲处于教会的绝对控制之下，而其主要特征之一即是对于宗教神学的盲目信仰，特别是，圣经更被看成是一切知识的源泉，并就构成了判断各种真理的最高权威。这就正如著名神学家奥古斯丁所提及的："从圣经以外获得的任何知识，如果它是有害的，理应加以排斥；如果它是有益的，那它是会包含在圣经里的。"显然，在这样的情况下，当时的思想界表现出思想僵化、教条刻板、盲目信赖权威、倾向于神秘主义等特征就十分自然了；又由于这些倾向都是与古希腊的理性精神直接相对立的，因此，这事实上就代表了理性精神的一次大倒退。

与理性精神的衰退相对应，数学在中世纪的欧洲也陷入了停滞的状态。例如，著名数学史家克莱因就曾指出："从 500 到 1400 年，整个基督教世界里，没有任何有

影响的数学家。”[1] 造成这一现象的一个重要原因就在于“数学在一个自由的学术气氛中最能获得成功”，而基督教的统治当然不可能造成这样一种气氛。

然而，又如第四章中所已指出的，随着基督教神学的深入发展，它必然地也会提出如何从理论上对自身的合理性作出论证的任务。这一任务是由著名神学家托马斯·阿奎那完成的，而其最终结果就是那本著名的《神学大全》——在其中他成功地将亚里士多德的哲学与基督教义综合成了一个演绎体系，而这不仅为基督教神学提供了最透彻、最全面的解释，而且也为理性的复归开启了大门。

具体地说，对于基督教义的理论论证事实上就是上帝“理性化”的过程；而也正因为此，在中世纪后期，教会和经院哲学家们就极力鼓励人们努力地去领悟上帝对自然的意图。这就是说，自然界是由上帝设计安排的，而人们则应努力去领悟上帝的推理、目的和意义。当然，在教会和经院哲学家看来，后一方向上的成功无疑就是对于上帝的无上智慧、无上荣光的最好证明；然而，在当时的历史条件下，这又确实为人们实际地去从事自然界的研究开辟了现实的可能性。

特殊地，又如前面所已指出的，在文艺复兴前后，我们更可看到基督教神学与“毕达哥拉斯－柏拉图传统”的一种“联姻”。这即是指这样的一种认识：上帝正是按照数学模式创造了世界，从而，数学也就是人们了解自

① 克莱因：《西方文化中的数学》，第94页，台北，九章出版社，1995。

然、也即了解上帝对自然界意图的一条必由之路。从历史的角度看，后者不仅造成了数学的复兴，而且也直接促成了理性精神的复活。例如，这就正如克莱因所指出的："上帝的方法是正确的，人们可以证明其正确性。因此，中世纪晚期的学者，特别是经院哲学家，不仅为近代数学和科学的诞生提供了理性环境，而且给文艺复兴时期的大思想家传授了这样的观点：自然界是上帝创造的，上帝的方法能为人们所领悟。"①

事实上，就文艺复兴时期各个大思想家的思想倾向而言，我们似乎可以看到一种十分明显的矛盾，即其一方面表现出了对于思想自由、对于从宗教和经院哲学的统治下获得思想解放的极度渴望，特别是，他们不再对圣经和亚里士多德的著作采取盲从的态度，而是普遍地采取了一种批判的立场，他们并用对自然界的直接研究取代了先前的学究式的、引经据典的研究方法；但是，作为具体的人，这些思想家又是在宗教世界这样一个特殊的环境中生长和受教育的，从而，他们就不可能轻易地背叛基督教的基本教义，以免成为世俗意义上的罪人。

显然，上述的"矛盾"也就更为清楚地表明了文艺复兴时期的大思想家们为何普遍地接受了这样的观念：上帝是有理性的，他按照数学规律设计、创造了整个世界，从而，人们就可通过直接的探索去发现自然规律，而这事实上也就是对于上帝存在性的直接证明。因为，只有这样，他们才能顺利地摆脱上述的"矛盾处境"，而

---

① 克莱因：《西方文化中的数学》，第98页，台北，九章出版社，1995。

且，这就为他们积极地去从事自然界的研究提供了重要的动力和信心，因为，按照这样的认识，对于大自然数学规律的探求不仅是一种完全合法的宗教活动，而且必然地会受到上帝的垂青和鼓励。

例如，文艺复兴时期的各个著名学者，如哥白尼、开普勒、伽利略、笛卡尔、莱布尼兹和牛顿等，都曾再三谈到上帝通过他的数学方案给了宇宙以和谐。如伽利略所说："上帝在自然界的规律中令人赞美地体现出来的并不亚于他在圣经字句中所表现的。"另外，莱布尼兹则曾更为明确地提出："世界是按上帝的计算创造出来的。"从而，研究数学的道路，就是通向上帝、逼近上帝之路。一般地说，这又正如英国数学家、著名哲学家怀特海所指出的，我们在此即可看到一种"本能水平"上的强烈信念[1]：

"我的意思是指那不可动摇的信仰，即所发生的每一事件的细节都可以按照给一般原理作出例证的完全确定的方式同它的先导联系起来。没有这个信仰，科学家的难以置信的劳动就没有希望。正是这个本能信念，活生生地悬在想象之前，成为研究的动力：相信这里有一个秘密。这个信念是怎样被活生生地植入欧洲思想之中的呢？"

"当我们把这个欧洲人的思想状态和其他文明的态度作一对比的时候，好像它只有一个源泉。它一定是来源于中世纪对于上帝理性的坚持，这个上帝被想象为具有

---

① 普里高津、斯唐热：《从混沌到有序》，第84页，上海，上海译文出版社，1987。

耶和华的个人能力以及某位古希腊哲学家的理性。每个细节都被监督着和命令着：对自然进行探索的结果只能证明忠于理性的正确性。请记住，我并非在谈论几个人的明确信仰。我的意思是指从几个世纪的坚信不疑中产生的欧洲思想上的印记。我这里指的是本能的思想状态而不仅是字面上的教义。”

容易看出，怀特海所说的“本能信念”事实上就意味着对于上帝的信仰只是文化传统的一种表现，即主要地就是由于在一定生活环境中、并按照一定的方式生活而不知不觉形成的；然而，就其实质而言，“基督上帝实际上是被召唤来为世界的可理解性提供基础的。”从而，随着科学的发展，上帝最终就不可避免会被逐出科学的领域。即如在牛顿那里上帝的作用已被仅限于作出所谓的“第一推动”，进而，到了拉普拉斯，他就“不再需要这样的假设了”！显然，这一过程事实上也就是理性精神的一个发展过程，因为，就其本质而言，理性精神即是与宗教神学直接相冲突的；当然，由上面的论述我们已经知道，这又并非是一个直截了当的简单过程，勿宁说，历史在此选择了一条曲折迂回的途径。

由上帝逐渐被请出科学领域的过程我们也就可以更为清楚地看到数学在理性精神发展过程中的重要作用。

具体地说，正如科学史的研究所已清楚地表明的，在近代自然科学的形成过程中，由伽利略所首先倡导的以下转变具有特别的重要性，即是认为自然科学的研究应当局限于“怎么样”的问题，也即应当满足于对于事物和现象的数学描述，而不应去涉及“为什么”的问题。

伽利略的上述立场是与前人、特别是与亚里士多德的作法直接相对立的。具体地说，在从事自然规律的哲学思考时，亚里士多德所关注的主要是“为什么”的问题。例如，正是由于这一原因，在对自然现象进行说明时，亚里士多德及其以后的经院哲学家们就常常诉诸于所谓的“终极原因”，特别是，他们更因此而引入了作用、动因、目的、自然位置和非自然位置等概念；然而，在当时的历史条件下，这种关于终极原因的分析主要地又只能是思辨的结果，或者说，即在很大程度上依赖于大胆的想象或天才的猜测。一般地说，后者事实上也就是所谓的“自然哲学”的一个主要特征，即是“用理想的、幻想的联系来代替尚未知道的现实的联系，用臆想来补充缺少的事实，用纯粹的想象来填补现实的空白。”①从而，这就给神秘主义、包括宗教迷信留下了极大的生存空间。

与此相对照，由于把研究的目光由“为什么”转向了“怎么样”，也即集中于自然界的数学规律（对伽利略来说，就是如何用数学准确地去描述事物的运动），因此，这就不仅使数学的地位再一次得到了确认和强化，而且也使科学初步地与宗教神学划清了界线，因为，按照这样的观点，宗教神学的作用仅限于如何对“为什么”的问题作出解释，而对于事物和现象的描述则完全是科学的任务，从而，上帝事实上就被请到了自然科学的后台。

---

① 《马克思恩格斯全集》，第21卷，第340页，北京，人民出版社，1965。

对于伽利略的上述贡献科学史学家们普遍给予了极高的评价。例如，克莱因就曾指出："近代科学成功的秘密，就在于在科学活动中选择了一个新的目标。这个由伽利略提出的、并为他的后继者们继续追求的新的目标，就是寻求对科学现象进行独立于任何物理解释的定量的描述。"① 另外，也正是从上述的角度去进行分析，马克思·韦伯更把所说的转变直接称为近代自然科学的"祛魅"运动。

为了更清楚地说明问题，我们并可以牛顿的力学研究为例作一简单的分析：

具体地说，在牛顿以前，天上星球的运动和地面上物体的运动通常被看成具有完全不同的性质，也即构成了两门互不相干的学科的研究对象——天文学和力学，而造成这种现象的一个重要原因则就是关于"终极原因"的分析。因为，在后一种研究中定性的分析具有特别的重要性，而当时的普通观念则认为天上的物体与地上的物体具有完全不同的性质：天上是诸神居住的地方，在那里一切都是完美的，而地上则是卑微的人类的寓所，这里的一切都是有缺陷的。

从而，尽管在牛顿以前，哥白尼、开普勒和伽利略等已分别对天文学和力学进行了深入的研究，但只是在牛顿那里，这两者才获得了真正的统一——它们被纳入到了同一个力学体系之中。然而，如果始终坚持先前的观点，也即认为"为什么"的问题是最为重要的，那么，

① 克莱因：《西方文化中的数学》，第190页，台北，九章出版社，1995.

牛顿就根本不可能在这一方面作出自己的重要贡献。

应当提及的是，牛顿的力学研究已经十分清楚地表明了数学在这一过程中的重要作用，因为，归根结底地说，牛顿的力学研究主要地即是一种数学的工作，这也就是说，正是数学为牛顿的力学研究提供了必要的工具。

具体地说，为了建立一个统一的理论，一个首要的任务就是要推出这样的一个力，它"正好使一个物体在一定轨道上以一定速度运行"——在牛顿的体系中，这就是所谓的"万有引力"。

牛顿是在 23 岁时作出关于万有引力的重要发现的。牛顿本人曾对这一过程作了这样的回忆："就在这一年，我开始想到把重力引伸到月球的轨道上，并且在弄清怎样估计圆形物在球体中旋转时压于球面的力量之后，我就从开普勒关于行星公转的周期与其轨道半径的二分之三方成比例的定律中，推得推动行星在轨道上运行的力量必定与它们到旋转中心的距离成反比例。于是我把推动月球在轨道上运行的力与地面上的重力加以比较，发现它们差不多密合。"[①]

牛顿所说的计算大致是这样的：

由月亮围绕地球运行的周期 $T_1 = 27.3$ 天 $= 2.36 \times 10^6$ 秒，以及地球到月亮的距离 $D_1 = 3.8 \times 10^8$ 米，可以算出月亮在轨道上运行的速度为

$V_月 = 2\pi D_1 / T_1$；

月亮的向心加速度为

① 丹皮尔：《科学史》，第 222 页，北京，商务印书馆，1975。

$a_{月} = V_{月}^2 / D_1 = 4\pi^2 D_1 / T_1^2 = 0.0027$ 米／秒^2。

如果以 D 表示行星到太阳的距离，以 T 表示行星绕太阳运行的周期，由同样的计算可求得其向心加速度为

$a = 4\pi^2 D / T^2$，

进而，如果以 m 代表行星的质量，我们就可依据牛顿第三定律立即求得行星所受的向心力

$F = ma = 4\pi^2 Dm / T^2$。

由开普勒第三定律 $D^3 / T^2 = C$，即 $T^2 = D^3 / C$，将此式代入上式即有

$F = 4\pi^2 Cm / D^2$，

这就是说，太阳对行星的吸引力应与太阳和行星之间的距离的平方成反比。

由于太阳对行星的吸引力与地球对它上面的物体以及地球对月亮的吸引力被认为具有同样的性质，因此，在牛顿看来，由上面的计算我们也就可以推知地球对物体的吸引力与这一物体到地球距离的平方成反比，从而就有

$a_{月} / g = R^2 / D_1^2$，

其中 g 为地面上物体自由落体的加速度，R 为地球半径。由于 $D_1 = 60R$，由此就可算得

$a_{月} = g \times (1/60)^2 = 0.0027$ 米／秒^2。

这样，两种计算的结果就是“密合”的。这一结果使牛顿确信自己的理论是正确的，这就是说，太阳对行星的吸引力与地球对月亮的吸引力是同一种力，这也就是地球吸引苹果并使其落地的力。这样，数学的计算就直接帮助牛顿作出了万有引力这一重要的发现。

[万有引力定律的具体推导过程是这样的：

通过将引力公式中的常数 C 归因于太阳的质量 M，并把 $4\pi^2C$ 改写成 kM，上述公式 $F=4\pi^2Cm/D^2$ 就变形成了

$$F = kMm/D^2,$$

对此再加以推广，我们就获得了如下的万有引力定律：任何两个质点之间相互吸引力的大小与它们质量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比，其方向沿两个质点的连线方向。

另外，由万有引力定律和运动三定律推出开普勒天体运动三定律的过程则与前面的发现过程恰好相反：

由于正是太阳对各个行星的引力使其绕太阳作圆周运动，因此，由万有引力定律，我们就可立即算得

$$F = kMm/D^2;$$

另外，依据运动定律，我们又可得知：当物体作圆周运动时，其所受到的力（向心力）即为

$$F = ma = mv^2/D = (m/D)(2\pi D/T)^2 = 4\pi^2 mD/T^2$$

由于这两个力是同一个力，从而就有

$$kMm/D^2 = 4\pi^2 mD/T^2,$$

由此就有

$$T^2 = 4\pi^2 D^3/kM。$$

由于太阳的质量 M 和 k 都是常数，因此 $(4\pi^2/kM)$ 也是一个常数，即与行星的质量无关，对此我们可简记为 C'，从而就有

$$T^2 = C'D^3。$$

这就是著名的开普勒第三定律。这一定律是开普勒经过多年观察、反复推敲后才得到的；然而，由牛顿定律出发却可在几分钟内就直接推出这一定律。]

由于牛顿力学在实践中获得了极大的成功，特别是，这一理论十分成功地预言了哈雷彗星的复归，以及海王星和冥王星的存在，因此，这就被誉为科学的最高成就——只有用像“非凡的”、“可敬的”或“惊人的”这样一些形容词，科学家们才能表达他们对牛顿的敬畏。当然，就人类对于自然界的认识而言，这也就是理性精神的伟大胜利；而且，由上面的介绍我们可以清楚地看出，又正是数学在这一过程中发挥了核心的作用。也正因为此，数学的影响就远远超出了自然科学的范围，并事实上成为了西方文化的一个主要特征。对此德国哲学家胡塞尔（E. Husserl）写道，这正是“从近代开始的自然科学、或说自然科学的理性的实际上完全不可避免的榜样作用的结果。……自然科学具有最高度的理性，因为它是受纯数学的指导的，它是通过归纳的数学的研究而获得的结果。难道这不应成为一切真正知识的楷模吗？难道知识，如果它想成为超出自然领域之外的真正知识的话，不应以数学为楷模吗？——或许我们在其他的知识领域内也具有那种‘生而固有的’、通过公理和演绎的方法获得必真的数学的理念。当然，直接从伽利略起的理论和实践的重大成功在此起了作用。从而，世界和哲学呈现出全新的面貌：世界本身必须是理性的世界，这种理性是在数学的自然中所获得的新的意义上的理性；相应地，哲学，即关于世界的普遍的科学，也必须被建筑成一种‘几何式的’统一的理性的理论。”[①]

① 胡塞尔：《欧洲科学危机和超验现象学》，第72页，上海，上海译文出版社，1988。

事实上，近代自然科学的成功，其影响可以说遍及思想和生活的每一个领域，包括道德、政治、技术、历史、社会、文学等。从而，这事实上就创造了一种新的文化——西方现代文化，而后者的一个主要特征就是数学在其中占有了特别重要的位置。

8．2 数学理性的内涵

应当首先指明的是，"理性"并不能被看成一个绝对的、僵化的概念，而也有其相应的历史发展和演变过程，而且，从横向的角度看，它也具有一定的文化相对性，即是对于不同的民族或文化可能具有不同的内涵（可参见7．2节）。也正是基于这样的认识，在以下的讨论中我们就将把那种孕育于古希腊文明、并伴随着近代自然科学的形成和发展逐步定型和不断得到强化的西方理性精神称为"数学理性"，而之所以采用这样一个名称，当然是因为数学在这一精神的形成和发展过程中发挥了特别重要的作用。特殊地，我们也将从这样的角度对"数学理性"的内涵作出具体的分析。

大致地说，笔者以为，以下几点即可被看成"数学理性"的主要内涵：

1．主客体的严格区分，而且在自然界的研究中，我们应当采取纯客观的、理智的态度，而不应掺杂有任何主观的、情感的成分。

显然，从数学的角度去分析，这种客体化的研究立场是十分自然的。事实上，由第一章的论述我们已经知道，这正是数学研究的一个主要特征，即尽管数学对象

并非现实世界中的真实存在，而只是抽象思维的产物，但是，在数学研究中，我们又应采取纯客观的立场，也即应当把数学对象看成是一种不依赖于人类的独立存在，并通过严格的逻辑分析去揭示其固有的性质和相互关系。

更为一般地说，主客体的严格区分，也即承认一个独立的、不依人们意志为转移的客观世界的存在，显然就构成了自然科学研究的一个必要前提，因为，归根结底地说，自然科学即是对于客观世界的研究。

另外，由以下的实例我们也许就可很好地理解“理智地”而非“情感地”去从事研究的涵义：

第五章中已经提到，莱布尼兹不仅与牛顿一起最早创立了微积分理论，而且也被公认为现代逻辑——数理逻辑——的创建者。就其基本的涵义而言，后者即是指这样的一种逻辑理论，在其中我们已经实现了彻底的符号化、演算化和系统化，从而，我们在此就可像作数学那样去从事逻辑的研究。莱布尼兹不仅在历史上最早地提出了上述的使逻辑“数学化”的思想，而且也明确地指出了这一发展的意义。莱布尼兹这样写道：“要是我少受搅扰，或者是更为年青些，或者有一些年青人来帮助我，我将作出一种‘通用代数’，在其中，一切推理的正确性将化归为计算。它同时又将是一种通用语言，但却和目前现有的一切语言完全不同；其中的字母和字将由推理来确定；除去事实的错误以外，所有的错误将只是由于计算而来。”这样，“如果人们之间存在着分歧，而他们又都具有解决分歧的良好愿望，所需要的只是拿起

笔和纸，并说：让我们一起来从事计算吧！”[①]

2. 对自然界的研究应当是精确的、定量的，而不应是含糊的、直觉的。

显然，上述思想不仅直接关系到科学研究的基本方法，而且也表明了科学研究的基本目标，即是要揭示自然界内在的数学规律；另外，从根本上说，这又可以被看成“自然界是有规律的、这些规律是可以认识的”这一基本思想的具体体现和进一步展开。由于这一思想清楚地表明了“数学理性”的“数学”特征，因此，在所说的意义上，这就可以被看成“数学理性”的核心所在。

进而，由爱因斯坦的以下论述我们则可清楚地看出上述思想对于自然科学研究的特殊重要性以及数学在其中所发挥的重要作用：“希腊人最早作出了一种思想体系。它的结论是谁也回避不了的。然后，文艺复兴时代的科学家把系统的实验同数学方法结合起来。这种结合，使得人们有可能如此精密地表述自然规律，并且有可能如此确定地用经验来检验它们，结果使得自然科学中不再有意见的根本分歧的余地。”这也就是说，“数学给予精密的自然科学以某种程度的可靠性，没有数学，这些科学是达不到这种可靠性的。”[②]

正因为定量的、精确的研究对于自然科学的研究有着如此的重要性，因此，在不少学者看来，这也就可被

---

① Kneebone:《Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics》, London, 1963, P. 151.
② 爱因斯坦：《爱因斯坦文集》，第三卷，第136－137页，北京，商务印书馆，1982。

看成客观性的主要标志。从历史的角度看，这就是关于"第一性质"和"第二性质"的区分。

具体地说，所谓"第一性质"与"第二性质"，即是指对于物质的属性我们应当作出如下的进一步区分：凡是能定量地确定的性质是物质所真实地具有的；与此相反，不能定量地确定的性质则并非物质所固有，而只是由主体所赋予它们的。

例如，开普勒就曾以自己的方式对自然事物作出了第一性质和第二性质的区分。他指出，当知识通过感官被直接提供给心灵时，是模糊、混乱和矛盾的，从而也就是不可靠的；与此相反，真实世界事实上只是量的特征的世界，从而，就只有从量的角度去从事研究，我们才能获得确定无疑、永远为真的知识。另外，伽利略也曾从本体论的角度提出了如下的关于"两种东西"的区分：一种东西是绝对的、客观的、不变的和数学的，另一种东西是相对的、主观的、起伏不定和感觉得到的；前者是神和人的知识王国，后者则是意见和假象的王国。这也就是说，自然的惟一根本特征是数学特征，这是第一性的属性；与此相反，意见与假象则是第二性的，也即是主观的、而并非客观事物所真实地具有的。例如，伽利略指出："关于白或红，苦或甜，有声或无声，香或臭，我却不觉得我的心灵必须承认这些情况是与物体一定有关系的；如果感官不传达，也许推理和想象始终不会达到这些。所以我想物体方面的这些味、嗅、色等等，好像真的存在于物体之中，其实只不过是名称而已，仅仅存在于有感觉的物体之中；因此，如果把动物

拿走，一切这样的特性就会消失。……这些性质——比如说味道、气味、颜色等——被归咎于天生的躯体。”[1]

显然，按照上述的思想，自然科学的研究就应严格限制于第一属性的范围，也即应当局限于那些可测量、并可定量地予以研究的东西。尽管关于第一性质与第二性质的区分有着明显的局限性，但是，从历史的角度看，这又是对于科学研究对象首次严格的界定，从而就有着重要的历史意义。

3．批判的精神和开放的头脑。

相对于以上两条，第三条和第四条可以说是与西方理性精神的历史发展直接相对应的，并从更为广泛的角度指明了“数学理性”的丰富内涵。

具体地说，所谓“批判的精神”，实质上就是表明了这样的一种真理观，即任何权威，或是自身的强烈信念，都不能被看成判断真理性的可靠依据；恰恰相反，一切真理都必须接受理性法庭的裁决，这也就是说，在未能得到理性的批准以前，我们应对一切所谓的“真理”都持严格的批判态度。

事实上，即使是在古希腊，批判的精神就可被看成理性精神的一个重要内涵。例如，尽管亚里士多德是柏拉图的学生，但他仍然对柏拉图的理念论（包括其在数学本体论问题上的实在论立场）进行了尖锐的批判。“吾爱吾师，但吾更爱真理。”亚里士多德的这一名言即就集中地体现了理性的批判精神。另外，在古希腊以后，尽

---

①　伯特：《近代物理科学的形而上学基础》，第72页，成都，四川教育出版社，1994。

管理性的批判精神曾在很长时期受到了教会和经院哲学家的极大压制，但是，到了文艺复兴的时代，这种精神又以更大的力量迸发了出来，其势锐不可当，锋矛所指，各种宗教神学和经院哲学理论纷纷土崩瓦解。

那么，在这种批判精神逐步形成与不断壮大的过程中，数学又发挥了什么样的作用呢？首先，从古希腊直到近代的欧洲，数学一直被视为真理的典范。例如，笛卡尔就曾指出："几何学家惯于在最困难的证明中，利用一长串简单而容易的推理得出最后的结论。""所有人们都能够了解、知道的东西，也同样是互相联系着的……"这也就是说，为了获得真理，我们就应把数学方法（更为准确地说，即是公理化方法）推广应用于一切知识的领域。其次，从更深的层次看，数学则又可以说是为人们的认识活动提供了必要的信心，从而不至于因普遍的批判而倒向怀疑主义和虚无主义。例如，这就正如《九十年代的中、小学数学》这一对于当代数学教育改革有着重要指导意义的文件所指出的："多亏了数学，人们才能有些可以确信的东西"；"数学已经给人类带来了无可估量的心理上的满足，我们不再害怕疯狂的上帝与我们人类开冷酷无情的玩笑了。"[①] 另外，从历史的角度看，这当然是一个十分重要的贡献，即"在各种哲学系统纷纷瓦解、神学上的信念受人怀疑以及伦理道德变化无常的情况下，数学是惟一被大家公认的真理体系。数学知识是确定无疑的，它给人们在沼泽地上提供了一个稳妥

① 阿蒂亚："数学与计算机革命"，载ICMI研究丛书之一：《国际展望：九十年代的数学教育》，上海，上海教育出版社，1990。

的立足点。”①

最后，如果说以上所涉及的主要是一些思想家的论述，那么，以下的事例则就从更为广泛的角度表明了数学作为一种“看不见的文化”对于人们养成批判的精神有着多么重要的影响。

“告诉一个小学生第二次世界大战持续了十年，他会相信；告诉他两个 4 的和为 10，就会引起争论了。”因为，通过日常的数学学习，人们已经逐步养成了这样的思维习惯，即我们应当坚持“证明”的要求，而不应过多地去关注所说的命题是由谁（教师、教材或某个权威）所提出的。

由于批判的精神归根结底地说是由人们的求真欲望所直接决定的，因此，就各个个人而言，这也就意味着，在对真理的探索过程中我们始终应当保持头脑的“开放性”。这就是说，如果一个假说或理论已被证明是错误的，那么，无论自己先前曾有过怎样强烈的信念，现在都应与之划清界限；同样地，如果一个假说或理论已经得到了理性的确证，那么，无论自己先前曾对此具有怎样的反感，现在又都应当自觉地去接受这一真理。

由此可见，从思维发展的角度看，头脑的开放性即是与强烈的进取心直接相联系的，它与批判的精神更有着互相补充、相辅相成的密切关系。

4. 抽象的、超验的思维取向。这就是说，我们应当努力超越直观经验并通过抽象思维达到对于事物本质和

① 克莱因：《古今数学思想》，第一册，第 251 页，上海，上海科学技术出版社，1979。

普遍规律的认识。

所说的这种思维取向在数学中显然也有着最为典型的表现，因为，作为“模式的科学”（可参见第一章），数学并非对于真实事物或现象的直接研究，而是以抽象思维的产物——（量化）模式——作为直接的研究对象；而也正因为此，数学规律所反映的就并非个别事物或现象的量性特征，而是一类事物或现象的共同性质。

另外，又如前面所已提及的，柏拉图的以下论述则可说是为上述思维取向的必要性和合理性提供了理论的依据，因为，按照柏拉图关于“理念世界”与“现实世界”的区分，后者只是理念世界的不完善摹本，而认识的根本任务则就是要超越现实世界并获得关于理念世界的真正知识，从而“抛弃对可感知和易逝事物的思考，而转向对永恒事物的沉思”，这种抽象的、超验的研究方式就是认识的必由之路。当然，对于柏拉图的理念论后人未必持完全肯定的态度；但是，这却可以说是科学家的一个共同认识，即科学研究的最终目标就是要透过现象以揭示事物的本质。对此，例如由对于“规律”的普遍理解就可清楚地看出：规律是“事物发展过程中的本质联系和必然趋势。……规律是看不见摸不着的，只有对十分丰富的现象进行分析研究，从感性认识上升到了理性认识，才能认识规律。科学的任务就是要揭示客观规律。”①

最后，上面已经指出，在牛顿以前，开普勒和伽利

① 辞海编辑委员会：《辞海》，第1440页，上海，上海辞书出版社，1979。

略等人已经分别对天体的运动与地球上物体的运动进行了深入的研究，与此相比，牛顿的贡献则在于成功地把这两者统一起来了，也即清楚地揭示了这两种运动事实上服从同样的规律，从而，与前人相比，牛顿的工作就达到了更大的深度，而后者的主要标志则就在于牛顿力学具有更大的普遍性。从历史的角度看，由于牛顿力学在很长时期内一直被认为是科学研究的典范，因此，对于普遍性的追求也就成了科学家们的共同目标。

以上我们对"数学理性"的内涵作了初步分析。为了更清楚地说明问题，以下再对"数学理性"与古代中国的自然观与认识论作一简单的比较。

笼统地说，西方的"数学理性"在很大程度上即是与古代中国的自然观与认识论直接相对立的。正如7.2节中所已提及的，在中国古代有机论的自然观占据了主导的地位，而其主要特征之一即是认为客观与主观是互相融合的，或者说，自身的"小我"应被消溶到整个大宇宙中去，从而对两者就不可作出严格的区分，或者说，两者构成了一个有机的整体。显然，这种"天人合一"的观点即是与西方对于主客体的严格区分直接相对立的。再例如，"道"的概念无疑可以被看成中国自然哲学的核心所在；然而，任何试图对此作出进一步了解的人都一定会被这一概念的含糊性所困扰，这也就是所谓的"'道'可道，非常'道'。"另外，传统的关于"悟道"的提法则又显然表明：对于道的认识主要地是一个"感悟"的过程（容易看出，上述关于"天人合一"的提法即是为这种特殊的认识论提供了理论的依据，因为，由

"天人合一"的立场出发，进而强调"天人感应"也就十分自然了)。此外，按照普遍的观念，这可被看成中国古代的一个重要特征："欧洲人倾向于寻求现象之外或超乎现象的实在，而中国人则在现象之中寻求实在。"① 从而，这也就是与上述"数学理性"的抽象的、超验的思维取向直接相对立的。最后，对于"中庸之道"的刻意追求，对于古训与先师的无比崇敬，显然也构成了中国文化的一个重要特征，从而就与西方文化的批判性、进取性构成了鲜明的对照——特殊地，在笔者看来，这事实上也就是诸多学者为何把东西方文化分别称为"阴性的（柔性的）"和"阳性的（刚性的）"的一个重要原因。

除去中西方的比较以外，我们还可提及现代西方对于"数学理性"的反思与批评。

具体地说，作为现代人对于文明发展过程的自觉反思，有不少西方学者对"数学理性"或所谓的"科学主义"提出了直接的批评。

例如，李约瑟就曾对所谓的"数学机械主义"作出了如下的描述："'新科学'或'实验科学'的特征，是在现象中找出一些可以度量的因素，并把数学方法应用到这些量的变化规律当中去，这是早已得到承认了的。这样，量的世界就取代了质的世界。……的确，伽利略的革命推翻了中世纪欧洲人所具有的有机的世界观（这种世界观和中国人的有某种程度的共同之处），而代之以一种实质上是机械的世界观。"② 另外，与李约瑟的以上

① 李约瑟：《中国科学技术史》，第二卷，第329页，北京，科学出版社，1978。
② 同①，第三卷，第353页。

言论相比，胡塞尔的批评显然更为直截了当："以数学的方式构成的理念存有的世界开始偷偷摸摸地取代了作为惟一实在的，通过知觉实际地被给予的，被经验到并能被经验到的世界，即我们的日常生活世界。"又"在几何和自然科学的数学化中，在可能的经验的开放的无限性中，我们为生活世界（即在我们的具体的世界生活中不断作为实际的东西给予我们的世界）量体裁一件理念的衣服，即所谓客观科学的真理的衣服。……这件'数学和数学的自然科学'的理念的衣服，或这件符号的数学理论的符号的外衣，囊括一切对于科学家和受过教育的人来说作为'客观实际的、真正的'自然，代表生活世界、化装生活世界的一切东西。正是这件理念的衣服使我们把只是一种方法的东西当着真正的存有，而这种方法本来是为了在无限进步的过程中用科学的预言来改进原先在生活世界的实际地被经验到的和可被经验到的领域中惟一可能的粗略的预言的目的而设计出来的。这层理念的化装使得这种方法、这种公式、这种理论的本来意义成为不可理解的。"[1]

再例如，法国著名科学史家亚历山大·柯伊莱的以下论述显然也有着同样的批判涵义："我一直认为，近代科学打破了隔绝天与地的屏障，并且联合和统一了宇宙。而且这是对的。但正如我也说过的，它这样做的方法，是把我们的质的和感知的世界，我们在里面生活着、爱着的、死着的世界，代之以另一个量的世界，具体化了

[1] 胡塞尔：《欧洲科学危机与超验现象学》，第58页、第61－62页，上海，上海译文出版社，1988。

的几何世界，虽然有每一个事物的位置但却没有人的位置。于是科学的世界——现实世界——变得陌生了，并且与生命的世界完全分离，而这生命的世界是科学所无法解释的，甚至把它叫做‘主观的’世界也不能解释。”①

如果说柯伊莱的上述批评已经表现出了人本主义的倾向，那么，当代著名科学家、诺贝尔奖得主普里高津则更从这样的角度对“科学主义”提出了直接的批评：“长期以来，科学论述的绝对性一直被视为普遍性的标志，在这种情况下，科学论述的普遍性成为对一切文化特殊性的否定和超越。”这也就是说，近代科学发现的是“一个失去了人性的世界”：“一个呆笨的事情，无声、无臭、无色，仅仅是事物的混乱，无尽头，无意义。”②

最后，德国著名哲学家、存在主义哲学最著名的代表人物之一海德格尔（M. Heidegger）也曾具体地分析道：“所有这一切发生在这样一个时代，在其中数学因素早已从一个世纪以来涌现出来，成为思想的基本特征并趋向明朗；按照这一对世界的自由筹划，这个时代开始走向一种新的对现实的进攻。在这里丝毫没有怀疑论，丝毫没有自我的立场和主观性——事实恰恰相反。因此，现代思想和探索的热情就投向在其内在本质中澄清和展开的最初只是暧昧不清的、间歇式的进步、常常被错误地说明的基本态度。但这意味着：数学因素在其本身的

---

① 普里高津、斯唐热：《从混沌到有序》，第71页，上海，上海译文出版社，1987。
② 同①，第87页。

内在的需要意义上要自我论证；它明确地把自身展现为一切思想的尺度，建立由此出现的法则。"[1] 同样地，胡塞尔也曾指出："我们必须把新的自然观中的一个基本成分突出出来。伽利略在从几何的观点和从感性可见的和可数学化的东西的观点出发考虑世界的时候，抽象掉了作为过着人的生活的人的主体，抽象掉了一切精神的东西，一切在人的实践中物所附有的文化特性。这种抽象的结果使事物成为纯粹的物体，这些物体被当作具体的实在的对象，它们的总体被认为就是世界，它们成为研究的题材。人们可以说，作为实在的自我封闭的物体世界的自然观是通过伽利略才第一次宣告产生的。随着数学化很快被视为理所当然，自我封闭的自然的因果关系的观念相应而生。在此，一切事物被认为都可一义性地和预先地另以规定。"[2] 显然，以上的论述不仅从反面更为清楚地表明了理性精神的内涵，而且也十分具体地指明了数学在这种精神形成和发展的过程中所起到的重要作用。

从而，总的来说，尽管以上的批评意见明显地反映出了在西方文化中所长期存在的"科学主义"与"人本主义"的对立（关于这种对立的全面分析，显然超出了本书的范围）；但是，就对于"数学理性"的深入理解而言，这些批评无疑有着一定的启示意义，特别是，我们不应对"数学理性"持绝对肯定的态度，并应清楚地看

---

① 海德格尔：《海德格尔选集》，第871页，上海，上海三联书店，1996。
② 胡塞尔：《欧洲科学危机与超验现象学》，第71页，上海，上海译文出版社，1988。

到它所固有的局限性或不足之处。

例如，正如上述的批评意见所已指明的，对于主客体的绝对区分，使人们面临着一个没有人性的、冷冰冰的世界，更阻碍了两者在更高层次上的融合；另外，对于精确性的刻意追求，则就为机械论的自然观提供了合适的土壤。按照后者，世界只是一个巨大的机器，一个按照精确的数学规律平稳地运行的机器，恰如一个巨大的时钟。再者，如果把抽象的、超验的思维趋向推向极端，则就必然会造成与经验的严重分离，也即用抽象的、数学的世界取代了真实的世界；而从认识论的角度看，这又必然会导致先验论，也即是与所谓的“惟理论”直接相联系的（特殊地，数学中对于数学美的片面强调显然也可被看成这种错误倾向的一个具体表现）。

显然，从这样的角度去分析，怀特海的以下论述就是很有道理的了：“数学的发展既推进了人类的理解力，也产生了新的错误方式。”[①] 这就是指，由于过分偏重于欧几里得理性，偏重于理智性和概念性的分析，以及片面地追求公理化或公式化的理解，这就使得西方文化最终陷入了深深的危机。

当然，从另外的角度看，以上关于“数学理性”局限性的分析事实上也就更为清楚地表明了理性不应被看成一个绝对的概念，毋宁说，随着人类文明的进步，这一概念也必然地有一个不断发展和演变的过程。特殊地，从历史的角度看，我们就不应把“数学理性”（或者更为

---

① 怀特海：《思维方式》，第115页，天津，天津教育出版社，1989。

一般地说，西方理性）看成人类理性的惟一形式，更不能以此为标准而认定中国古代不存在任何理性；恰恰相反，就如第二部分中关于中西古代数学的比较分析所已表明的，我们在此应当明确承认理性的文化相对性。

但是，在清楚地看到“数学理性”的局限性的同时，作为问题的另一方面，笔者以为，我们又应明确地肯定“数学理性”的历史进步性与其对于人类文明发展的积极意义。这也就是说，我们应当坚持这样的立场，即应从历史的角度、而不是现代的立场去对“数学理性”作出分析和评价——正如序言中所已指明的，后者事实上就可被看成文化史研究的一个基本立场。

特殊地，前面的论述已经清楚地表明，“数学理性”的确应被看成近代自然科学何以能在西方顺利地得以建立的一个重要条件。为了清楚地说明问题，我们在此还可对所谓的“李约瑟难题”作一分析。

具体地说，所谓“李约瑟难题”即是指由李约瑟在中国科学史的研究中所提出的这样一个问题：为什么近代科学只在伽利略时期的西方产生，而在公元前 2 世纪到公元 15 世纪一直处于领先地位的中国传统科学却始终处于原始的经验主义阶段，没有能自发地产生出近代科学？

为了对上述难题作出解答，李约瑟认为，我们必须从东西方的社会和经济结构，以及相应的思想体系这样两个方面去作出分析。从而，这在整体上就超出了本书的范围。但是，在笔者看来，这无疑应当被看成造成所说现象的一个重要原因，即古代中国的自然观和认识论

对于人们深入地去开展自然的研究有着很大的消极影响或阻碍作用。因为，即如上面所已指明的，按照古代中国的自然观和认识论，人们始终停留于现象的解释而未能很好地认识到透过现象去认识本质的重要性，更以思辨和直觉的猜测作为主要的认识手段，这样，当然就不可能产生近代意义上的自然科学，并为主观主义、神秘主义留下了极大的余地；另外，如果始终未能对主客观作出严格的区分，那么，我们也就根本不可能对自然科学的研究对象作出明确的界定。最后，还应提及的是，按照克莱因的观点，缺乏批判力并就可以被看成东方（包括印度人和阿拉伯人）未能发展起像欧氏几何那样的演绎性数学的一个重要原因。这就是说，“从整体上看，两种文明均缺乏批判力……因此，对于数学，他们可能满足于现买现卖……”①

对以上两点进行综合，容易看出，就对于“数学理性”的评价而言，我们既不应作绝对的肯定，也不应对此持否定的态度；另外，就理性精神的进一步发展而言，我们则又不应期望通过完全抛弃“数学理性”而获得“新生”，更不应不切实际地去提倡对于“东方思维的复归”。恰恰相反，笔者以为，我们在此应当明确地提倡“科学精神”与“人文精神”、西方文化与东方文化的相互渗透和融合，从而达到新的、更高的发展水平。特殊地，在笔者看来，这事实上也就是种种后现代主义论述的积极意义之所在；另外，就理性精神的历史发展而言，

---

① 克莱因：《数学：确定性的丧失》，第108页，长沙，湖南科学技术出版社，1997。

这则就意味着对于自身局限性的一种超越——也正是在这样的意义上，这就可以被看成理性精神历史发展的必由之途。

事实上，就理性精神的现代发展而言，其重要内涵之一即是指我们应当对自身、自身与外部世界的关系，特别是自身的局限性有着清醒的认识。值得指出的是，数学在这一方面也为我们提供了有益的启示，因为，数学的现代发展已经清楚地表明了自身的局限性。

具体地说，正如第一部分中所已提出的，数学现代发展的一个主要特征即是其研究对象已经由具有明显直观背景的量化模式扩展到了可能的模式，这也就是说，现代数学已在一定程度上表现出了与现实世界的分离，而这主要地即是通过抽象化、一般化、形式化得以实现的。这种发展趋势是有其一定合理性的，但是，在一部分人那里，这种趋向又被发展到了一种绝对的地步。例如，美国数学教授斯通（M. Stone）在60年代发表的一篇题为“数学革命”的文章中就曾指出：“当我们再来比较一下今天的数学和19世纪末的数学时，我们会惊奇地发现我们的数学在数量和复杂程度上的飞速发展，但同时我们也应注意到这些发展与强调抽象概念、与对广泛的数学模型的观察与分析之间存在着密切的联系。其实，通过进一步的研究，我们发现只有把数学与其应用分离开来，才会产生这种新的发展方向。在本世纪内，这个方向已成为其旺盛生命力和发展的真正源泉。……数学只有脱离过去那种必须束缚于现实的某一方面的状况，才能成为我们用于打碎枷锁的极端灵活的有力的工具。

证明这一论点的例子不胜枚举。"[1] 另外，本世纪最为著名的数学家之一、英国后期剑桥分析学派的领袖哈代则曾更为明确地指出："不可否认，许多基本数学，包括关于运用微积分演算的良好知识，有相当大的实际用途。但总的来说，数学的这些部分是相当沉闷的，它们刚好是美学价值最小的部分。'真正'的数学家的'真正'的数学，费马的以及欧拉的、高斯的、阿贝尔和黎曼的数学，是几乎完全'无用'的。"[2]

从而，在这种极端化观念的指导下，在现代的数学研究中我们就可看到一些危险的迹象，即如迷恋于抽象化、形式化，只是为数学而数学，而完全忘掉了数学所应担负的现实责任。事实是，据克莱因的估计，在今天活跃于数学舞台的数学家中，约有90%的人都无视科学并且陶醉于这种纯数学的研究："多数数学家却抛弃了他们的传统和遗产，自然发生的秘密信息现在遇到的只是些紧闭的双眼和迟钝的耳朵。数学家们躺在先辈的功劳簿上，幻想依靠昔日辉煌获得喝彩与支持。纯数学家则陷得更深，他们把应用数学家从同行会中驱逐出去，妄想垄断数学家这个令人景仰的头衔，从而独自攫取先人的名誉。他们丢弃了丰富的思想之源，花费着先人积累的宝贵财富，他们正沿着一丝微光走出这个世界。……从整体上看，数学在自陷；在自给自足；而且从过去的情形判断，现代数学研究的大部分都不可能会为科学发

---

① 克莱因：《数学：确定性的丧失》，第304－305页，长沙，湖南科学技术出版社，1997。

② J. Kapur：《数学家谈数学本质》，第256页，北京，北京大学出版社，1973。

展作出贡献。数学现在几乎成了一个自我封闭的体系。它根据自己评判现实意义的标准和完美性的标准来决定自己的前进方向，它甚至于满足于自己与外界的问题、动力、灵感相隔绝的状况。”[1]

正如第一部分中所已指明的，这种纯数学的研究趋势即使对于数学自身的发展来说也是十分有害的。因此，当务之急就是要帮助数学家们对此作出自觉的反思从而能有效地予以纠正。事实上，数学自身的发展即已清楚地表明了这种局限性，这就是所谓的“局限性定理”，特别是，在此即有著名的哥德尔不完备性定理。

具体地说，哥德尔不完备性定理可以表述为：任一以形式算术系统为子系统的数学系统，如果是相容的，就一定是不完备的。因此，这就从数学上严格地证明了这样一点，即形式化的研究必然有其一定的局限性，因为，对于任何足够丰富（足以开展出形式算术系统）的数学理论来说，只要它是相容的（显然，如果理论不相容，它就不能被看成完全建立好了的，也即必须对此作出适当的修正），就一定是不完备的，并是不可能予以完备的；从而，相应的概念就不可能单纯依据纯形式的刻画得到精确的表述。

正因为哥德尔不完备性定理（及其他的一些相关定理，即如塔尔斯基关于真理概念可定义性问题的相应结果）清楚地表明了数学自身的局限性，这就常常被称为“局限性定理”，而其所给予我们的一个重要启示则在于：

---

[1] 克莱因：《数学：确定性的丧失》，第312页，长沙，湖南科学技术出版社，1997。

任何理论或方法都有其一定的局限性，重要的问题在于如何能清楚地去认识这种局限性并达到对其的超越。正如前面提及的，这事实上就构成了现代理性精神的一个重要内涵，从而，在这样的意义上，数学就又一次证明了自身对于人类理性精神的形成和发展的特殊价值。

综上所述，我们就应充分肯定数学对于人类理性精神发展的特殊意义。这也就如克莱因所指出的："在最广泛的意义上说，数学是一种精神，一种理性的精神。正是这种精神，激发、促进、鼓舞和驱使人类的思维得以运用到最完善的程度，亦正是这种精神，试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活；试图回答有关人类自身存在提出的问题；努力去理解和控制自然；尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻的和最完美的内涵。"[①] 当然，从更为广泛的角度看，这也就表明了数学确应被看成整个人类文化的一个重要组成成分："数学一直是形成现代文化的主要力量，同时又是这种文化极其重要的因素。"[②] 显然，从这样的角度去分析，我们也就应当明确肯定齐民友先生的以下论述："历史已经证明，而且将继续证明，一个没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的，一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的。"[③] 特殊地，考虑到中国的传统文化从来没有能给予数学应有的重视，也没有能清楚地看到数学的文化价值，这一断言就更应被看成有着十分重要的现实意义。

---

① 克莱因：《西方文化中的数学》，第 8－9 页，台北，九章出版社，1995。
② 同①，第 1 页。
③ 齐民友：《数学与文化》，第 12－13 页，长沙，湖南教育出版社，1991。

第九章　数学与思维

本章主要从微观的角度指明了数学的文化价值，即数学对于人们养成良好的思维习惯有着十分重要的意义。特别是，我们将指明这样一些思维模式或研究思想，它们或者直接渊源于数学，或者在数学的研究中有着最为典型的表现，然而，这些思维模式或研究思想又都在数学以外产生了十分广泛的影响并取得了成功的应用；另外，在笔者看来，这事实上也就从一个侧面对我们如何搞好数学教育改革指明了努力的方向，这就是指，在数学教育中我们不应惟一注意数学知识的学习，而应更加重视思维方法的训练和培养。

9.1　数学化的思想

所谓“数学化”，在此是指如何由实际问题去建构出它的数学模型，并应用数学的知识和方法以求得问题的解决。显然，数学化的过程直接关系到了数学的实际应用，而且，从更深人的层次看，这也涉及到了一些十分重要的思维方法或研究思想。

1. 由定量到定性的研究思想。这就是指，在对事物或现象进行研究时，应当尽可能地用数学的概念去对对象作出刻画，并通过数学的研究去揭示其内在的规律。

事实上，由前一章的讨论我们已经知道，定量的研究正是近代自然科学得以形成的一个重要条件。这就正如克莱因所指出的："近代科学的历史，……就是将关于光、声、力、化学过程以及其他概念的模糊思想化归成数及量性关系的历史。"[1] 更为一般地说，按照康德的观点，这事实上就可以被看成一门科学成熟程度的重要标志，即只有当一门科学达到了成功地应用数学的程度，才能被看成真正成熟了的。

另外，研究强调的是，定量分析方法的应用在现今也已不再局限于物理学、化学等自然科学，而是进一步扩展到了人文科学和社会科学的范围。事实上，就数学的应用而言，应当说并不存在任何绝对的界限，对此例如由经典数学到统计数学、由精确数学到模糊数学的发展就可清楚地看出。

具体地说，随着自然科学研究的深入，人们逐渐认识到了对于客观事物和现象应当作出必然性和或然性的区分：前者是完全确定的，后者则表现出了很大的随机性，即如气体是由大量分子组成的，而其中每一个分子的运动都是无规则的，即在每一时刻都可能有各种不同的位置、不同的方向和不同的速度；另外，在正常的情况下，我们显然也不可能就骰子的投掷情况作出准确的

① 克莱因：《西方文化中的数学》，第192页，台北，九章出版社，1995。

预言。

由于传统数学（经典数学）主要局限于必然性的研究，因此，这类数学就不可能成功地被用于或然性的研究；但是，后者却又不能被看成数学研究的绝对界线，恰恰相反，在此所需要的即是敢于超越传统的范围并发展起新的数学理论和工具。如众所知，这就是所谓的“统计数学”，后者并已成为数学大家庭中的一个重要成员。

另外，由于精确性一直被看成数学的主要特点之一，因此，在很长时期内人们就一直认为数学对于模糊事物和现象的研究是无能为力的。然而，数学的现代发展又已突破了这一历史的局限性。

具体地说，这就是由美国控制论专家査德（L. Zadeh）率先发展起来的模糊数学。首先，借助于“隶属函数”，我们即可引人模糊集合的概念。例如，“小”这一概念就可大致地用以下的模糊集合来表示：

【小】$=0.99/1+0.96/2+0.92/3+\cdots+f(n)/n+\cdots$

其中 $f(n)=[1+(n/10)^2]^{-1}$，而［0.99/1］、［0.96/2］等分别表示自然数 1 和 2 可以被看成“小”的程度，也即其对于【小】这一模糊集合的隶属度分别为 0.99 和 0.96；特殊地，如果一个元素的隶属度为 1，则就表示这一元素完全属于这一集合，而如果其隶属度为 0，则就表示这一元素完全不属于这一集合。

其次，以模糊集合论为基础，我们又可进而发展起各种模糊数学理论。例如，所谓的“近似推理”就是指这样的推理模式，其真值和推理规则都是模糊的而并非是精确

的。显然,近似推理在社会实践中的应用是十分广泛的,即如由前提"x有点小"和"如果x是小的,则y是大的",我们就可推出"y有点大"这一近似的结论。然而,利用模糊数学我们就可为这种推理过程建立相应的数学模型,从而也就使之成为了数学的研究对象。

2. 相对于实际问题而言,数学化的过程必然包含有一定的简化和理想化。这就是说,在数学模型的建构过程中我们应当集中于具有关键作用的量和关系。

例如,牛顿关于天体运动的研究就可看成这方面的一个典型例子。

具体地说,在由万有引力定律和三个力学原理去证明开普勒的天体运行规律时(参见第八章),牛顿对研究对象作了如下的极大简化,即假设太阳自身是不动的,而且,太阳和相关的行星都可被看成数学上的点,其他行星对这一行星的引力以及这一行星对于太阳的引力则是微不足道的。由于牛顿清楚地知道上述的假设只是对于真实世界的一种简化,因此,在完成了上述的工作以后,牛顿又对自己的工作作了进一步的发展。例如,这首先就是指我们应当同时考虑太阳对于行星的作用以及行星对于太阳的反作用,这样,行星的真实运行情况就得到了更好的解释,即它们事实上并不是简单地围绕椭圆焦点中心——太阳——作运动,恰恰相反,太阳和这一行星同时以椭圆为轨道围绕它们的共同引力中心作运动。进而,牛顿又由所谓的"二体问题"过渡到了"三体问题"或"多体问题",即在研究行星的运行时,不仅要考虑太阳对于这一行星的作用,而且也要考虑其他行

星对它的作用。显然，在这样的情况下，我们又必须对相应的结论作进一步的修正。当然应当指明的是，这时科学家所面临的情况就是十分复杂的了。

从而，由牛顿的实例我们就可看出，必要的简化事实上就是科学研究能够顺利进行的一个必要条件。当然，又如前一章中所已指出的，我们在此不应用“数学世界”去完全取代“现实世界”，也即不应把“数学世界”看成是真实的，而把“现实世界”看成前者的一个不完善摹本；恰恰相反，我们应当明确地承认“数学世界”只是真实世界的一个简化了的模型，并应通过不断逼近获得更为可靠的知识。

最后，笔者以为，以下的例子即就十分清楚地表明了“理想化”在科学研究中的重要作用，特别是，这就可以被看成概念创造的一个重要源泉。

具体地说，统计表明，尽管就每个具体的个人而言，其在智力和体力等方面都可能有很大的差别，但就整体而言，几乎人类的所有特征又都呈现出了“正态分布”现象，即其统计图线都表现为如下的“正态曲线”(图8)。

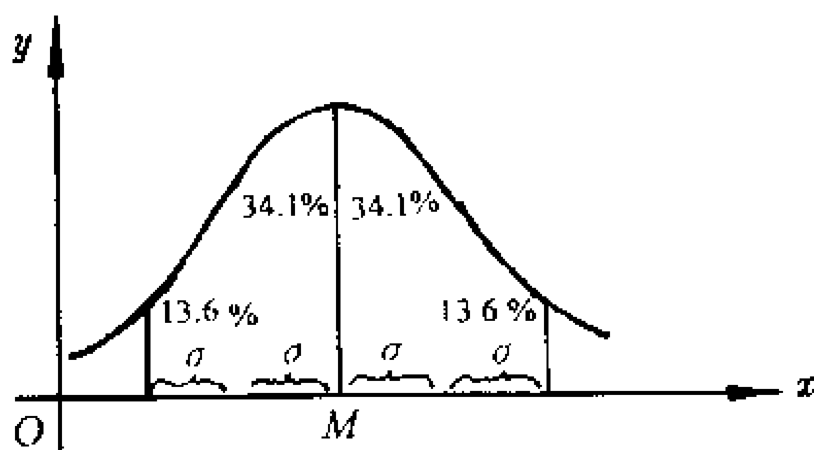


图8

（其中，M 为某一特征值的平均值；σ 则是所谓的“标准偏差”，即是各个数据与平均值偏差的平方的均方根。）

图线表明，68.2%的数据位于与平均值距离不超过一个标准偏差的区域内，27.2%的数据位于与平均值距离介于一个标准偏差至二个标准偏差的区域内。从而，依据这一分析，我们在此就可引进“理想人”的概念：它的各项特征值就等于各个分布曲线的平均值。实践表明，就如“理想分子”的概念对于研究气体的运动是十分有用的，“理想人”的概念对于社会科学的研究也是很有用的，而这正是通过理想化（更为准确地说，即是通过以数学为工具的理想化）而创造的一个概念。

9．2　公理化的思想

所谓“公理化”，即是指在理论的组织中应当用尽可能少的概念和命题作为必要的基础，并通过明确的定义和逻辑推理来建立演绎的体系。显然，相对于上述的“数学化”而言，公理化的思想达到了更高的抽象层次，因为，作为一种组织形式，公理化事实上涉及到了诸多命题（事实性结论）和概念间的逻辑联系，从而就包含了由个别向整体的过渡。

值得提及的是，上述的结论也已由学习心理学的现代研究获得了实验的论据。

例如，按照 Van Hiele 夫妇的研究，学生在几何学习方面的思维发展水平可划分为如下的五个等级：[①]

---

① 张奠宙等著：《数学教育学》，第六章，南昌，江西教育出版社，1991。

水平0：直观。学生能从外形上整体地认识图形，例如能讲出三角形、正方形或长方形，等等，但不能清楚地确定图形的性质。

水平1：分析。学生能对图形的性质进行分析，例如能分析出矩形的对角线相等，菱形的四边相等，但不能清楚地将一些图形或性质联系起来。

水平2：抽象。学生能将一些图形或性质相互联系起来，例如懂得正方形也是矩形，但不会组织起一系列命题来证明观察到的东西。

水平3：演绎。学生能展开一系列命题，从一些结论推导出进一步的结论，例如由平行线公理证明三角形内角和为180度，但他们还不能认识到严密性的要求，也不能理解演绎体系之间的关系。

水平4：严密。学生能以较高程度的严密性分析各种演绎系统，能将演绎体系的这种性质理解为公理的相容性、独立性和完备性。

显然，这也就从一个侧面表明了公理化思想确应被看成属于较高的思维层次。

更为一般地说，我们在此还可提及著名心理学家、哲学家皮亚杰（J. Piaget）关于儿童智力发展水平的论述。

具体地说，作为儿童认识发展过程的具体分析，皮亚杰指出，我们在此可以区分出以下的四个不同阶段：

（1）感知运动阶段。这是智力的萌芽阶段。在这一阶段中，儿童靠感觉系统和动作行为与环境直接作用；另外，在这一阶段的后期，儿童逐步开始学会使用表征

符号来了解世界。

（2）前运演阶段。这一阶段的儿童已具有表象思维能力，特别是，已能使用语言作为表征符号去代表某种事或物，并能依据事物的表示或自我看法进行推理，但还不能进行逻辑推理，其认识活动具有自我中心的特点。

（3）具体运演阶段。此时逻辑思维开始出现，即如能够看到方法的互补性、观念的相互冲突等；但一般还只能对具体的或观察所及的事物进行运演，而不能将逻辑思考应用于抽象符号问题。这一阶段的儿童并可进行多重分类、系列顺序、守恒观念及时空关系等心理运作。

（4）形式运演阶段。此时已能使用抽象的名词进行逻辑思维和命题演算，能用假设进行推理，将形式和内容分离，从而思维已不再局限于事物的具体内容或感知的事实，并朝着抽象思维和概念化活动的方向发展。

显然，按照这样的区分，就只有达到了形式运演阶段，人们才有可能真正理解和运用公理化思想。

正因为公理化的过程即是将研究的对象由个别的命题和概念扩展到了相应的集合，并能清楚地揭示概念和命题之间的逻辑联系，因此，这就常常被看成对于理论进行整理和进行表述的最好形式。例如，正是在这样的意义上，欧几里得的《几何原本》就一直被看成科学研究的一个典范。这也就如爱因斯坦所指出的："一切科学的伟大目标，即要从尽可能少的假说或者公理出发，通过逻辑的演绎，概括尽可能多的经验事实。"[①]

---

① 爱因斯坦：《爱因斯坦文集》，第一卷，第262页，北京，商务印书馆，1982。

值得指出的是，数学的这种影响事实上已超出自然科学的范围而扩展到了政治学、经济学、伦理学等各个方面，特别是，在18～19世纪的欧洲更出现了一个人文科学和社会科学"数学化"的高潮。例如，以下的诸多著作事实上就都可以被看成这一方向上的努力，因为，所有这些著作都以建立公理化的理论体系作为自己的最终目标：杰文斯的《政治经济学理论》、瓦尔拉斯的《纯粹经济学要义》、斯宾诺莎的《伦理学》、洛克的《人类理性论》、贝克莱的《人类知识原理》、休谟的《人性论》和《人类理解研究》、边沁的《道德与立法原理理论》、穆勒的《人性分析》，等等。

例如，李嘉图无疑是经济思想史中的最为重要人物之一，因为，尽管古典的增长论、价值和分配论的各个要点在斯密、马尔萨斯、威斯特等人的著作中都可找到，但把这些要素总括成一个严密的逻辑体系的却是李嘉图。具体地说，李嘉图的这一工作应当说仍然处于斯密的影响之下，但他所提出的却是一个截然不同的体系，而两者的主要区别则就在于：李嘉图用的是长链的纯演绎法，而斯密用的却是同经验观察交错的短链论证方法。对此英国著名经济学家布劳格曾评论道："如果经济学基本上是一种分析机械和一种思想方法，而不是一堆实际的成果，那么，可以毫不夸张地说，正是李嘉图发明了经济学的方法。"①

另外，在政治学的领域内，洛克的理论应当说有着

① 罗杰·巴克豪斯：《现代经济分析史》，第44页，成都，四川人民出版社，1992。

十分重要的影响。例如，1776年美国的《独立宣言》就曾直接引用了洛克的以下论点："我们坚信这些不言而喻的真理：人人生而平等，他们都从他们的'造物主'那里被赋予某些不可转让的权力，其中包括生命权、自由权和追求幸福的权力。为了保障这些权力，所以才在人们中间成立政府。而政府的正当权利，系得自被统治者的同意。如果遇有任何一种形式的政府变成是损害这些目的的，那么，人民就有权利来改变它或废除它，以建立新的政府。这新的政府，必须是建立在这样的原则基础上，并且是按照这样的方式来组织它的权利机构，即就人民看来是最能够促进他们的安全和幸福的。"[①] 然而，洛克的政治学说事实上也是一个公理化的理论，特别是，洛克就以"人人生而平等"作为最基本的公理，并以此为依据对政府的义务和人民的权力进行了论证。这就是说，政府应当保障人民的基本权力，而如果违反了这样一点，人民就有权利推翻它。

再例如，斯宾诺莎的《伦理学》也完全是仿照几何学而构造的：其中有定义、有公理、有定理，公理后面的一切都由演绎论证作了"严格"的证明。另外，按照边沁的理论，"快乐"和"痛苦"是伦理学中最为基本的两个概念，而对快乐的追求与对痛苦的躲避则就构成了人类活动的最基本动力。边沁认为，任何增加人类快乐的行为都是善的，那些减少人类快乐的行为则是恶的，从而这就构成了伦理学理论中的两条公理，也即我们应

---

① 克莱因：《西方文化中的数学》，第337－338页，台北，九章出版社，1995。

当以此为依据去判断人们行为的是非或善恶。

最后，应当指出的是，在笔者看来，希尔伯特的以下论述即可说是最为清楚地表明了公理化思想的必要性及其普遍意义：“的确，不管在哪个领域，对于任何严正的研究精神来说，公理化方法都是并且始终是一个合适的不可缺少的助手；它在逻辑上是无懈可击的，同时也是富有成果的；因此它保证了研究的完全自由。在这个意义上，用公理化进行研究就等于用已掌握了的东西进行思考。早年没有公理化方法的时候，人们只能素朴地把某些关系作为信条来遵守，公理化的研究方法则可去掉这种素朴性而使信仰得到利益。”又“在一个理论的建立一旦成熟时，就开始服从于公理化方法，……通过突进到公理的更深层次……我们能够获得科学思维的更深入的洞察力，并弄清我们的知识的统一性。”[①]

9.3　思维的自由想象与创造

正如第一篇中所已指出的，作为“模式的科学”，数学并非对于事物或现象的直接研究，而是以抽象思维的产物作为直接的研究对象。由于后者在一定意义上就意味着与真实世界的分离，因此，这也就为思维的自由创造提供了现实的可能性；另外，又如前面所已提及的，现代数学发展的决定性特点就是其研究对象的极大扩展，也即是由具有明显现实背景的量化模式扩展到了可能的量化模式，这就是说，在一定的限度内，我们可以单纯

---

① 克莱因：《古今数学思想》，第四册，第100页，上海，上海科学技术出版社，1979

凭借"思维的自由想象和创造"去构造出各种可能的量化模式，从而，在这样的意义上，我们也就可以说，数学为人类创造性才能的充分发挥提供了最为理想的场所。这也就如彭加莱所指出的："数学科学是人类精神从外界借取的东西最少的创造物之一，……它……充分地向我们表明，当人类精神越来越多地摆脱外部世界的羁绊时，它能够创造出什么东西。"又"数学……是一种活动，在这种活动中，人类精神似乎从外部世界所取走的东西最少，在这种活动中，人类精神起着作用，或者似乎只是自行起着作用和按照自己的意志起作用。"①

尽管数学被说成是"人类精神从外界借取的东西最少的创造物"，但是，在现代的自然科学、特别是理论科学的研究中，思维的自由想象与创造应当说同样发挥了十分重要的作用，而数学则不仅为这种创造性工作提供了必要的概念工具，而且也在很大程度为之指明了努力的方向。具体地说，按照现代的观点，科学理论主要地应被看成是一种"假说－演绎"系统，这也就是说，其中的普遍原理已不再建立在对于经验事实的直接归纳之上，恰恰相反，这些原理只是一种暂时性的假说，而其真理性则就取决于由此所推导出的具体命题能否得到经验的确证。显然，按照这样的观点，自然科学与经验的距离就变得愈来愈大了，而在很多科学家看来，后者事实上也就清楚地表明了数学对于自然科学的研究有着愈来愈大的重要性。例如，这就正如爱因斯坦所指出的：

① 彭加莱：《科学的价值》，第367页、第374页，北京，光明日报出版社，1988。

在现代的科学研究中，“逻辑基础愈来愈远离经验事实，而且我们从根本基础通向那些同感觉经验相关联的导出命题的思想路线，也不断变得愈来愈艰难、愈来愈漫长了”，从而，“理论科学家在探索理论时，就不得不愈来愈听从纯粹数学的、形式的考虑。”这就是说，“我们能够用纯粹数学的构造来发现概念以及把这些概念联系起来的定律，这些概念和定律是理解自然现象的钥匙。”①

例如，作为一个具体的例子，我们即可看量子力学理论的发展。一般认为，波动力学构成了量子力学的主要出发点。具体地说，波动力学的基本立场即是认为微观粒子同时具有波动性和粒子性，而又正是为了能对这种波粒二象性作出统一的描述，奥地利物理学家薛定谔（E. Schrodinger）引进了波函数的概念，它被用于表明微观粒子的状态，而决定微观粒子变化的方程就是所谓的“薛定谔方程”。然而，在当时薛定谔却未能对波函数的物理意义作出进一步的解释，从而其主要地就是从数学中借用了必要的概念工具。这也就如当时在学术界中流行的一首小诗所说：“薛定谔运用波函数，能算出不少好东西；要问函数的意义怎么样，却又谁都说不上。”后来，德国物理学家玻恩（M. Born）对波函数的意义作了如下的解释：波函数表明物质波乃是电子分布的几率波，而这事实上也就意味着基本概念框架的重要变化，即在量子力学中几率的概念已取代原来的确定性概念而占据了主导的地位，从而，又正是数学为量子力学的进一步

① 爱因斯坦：《爱因斯坦文集》，第一卷，第372页、第262页、第316页，北京，商务印书馆，1982。

发展提供了必要的概念工具。

另外，与上述的发展相类似，麦克斯韦(J. Maxwell)在最初也正是借助于数学而引进了“位移电流”这样一个概念，并以此为基础发展起了自己的电磁场理论。由于电磁波的存在只是在二十多年后才得到了证实，因此，在很长的时间内，就如赫尔姆霍茨（Von Helmholtz）所指出的，电磁波也只是作为“符号的载体”而存在的。对此赫茨也曾写道：“对于什么是麦克斯韦的理论这一问题，我不知道任何简单和确定的回答，除非是：麦克斯韦的理论就是麦克斯韦方程组。”

从而，总的来说，这就正如美国学者戴森所指出的：“对于一个物理学家来说，数学不仅是可以用来计算现象的工具，而且是可以创造新理论的那些概念和原则的主要源泉……一个物理学家必须借助于数学来建立他的理论，因为，数学使他能比有条理的思考想象出更多的东西。”①

当然，和数学的现代研究一样，上述的现象也不能被理解成在自然科学的研究中我们可以任意地去从事概念或理论的创造；恰恰相反，我们在此应当明确肯定实践的决定性作用。除此以外，数学也为我们有效地去从事科学的创造活动提供了一个相对的评价标准。这就是指，对于数学美的追求也可看成科学研究活动的一个重要目标。

事实上，我们在此即可首先提及彭加莱关于发明创

① 利特尔：“数学的不确定性”，载《自然科学哲学问题丛刊》，1982年，第一期。

造的本质的分析。针对先前即已存在的"发明创造的本质即是概念的可能组合"的观点，彭加莱提出："数学创造实际上是什么呢？它并不存在于用已知的数学实体作出新的组合。任何一个人都会作这种组合，但这样作出的组合在数目上是无限的，它们中的大多数完全没有用处。创造恰恰在于不作无用的组合，而作有用的、为数极少的组合。发明就是识别、选择。"[①] 那么，科学家又是如何去作出所说的选择的呢？彭加莱认为，正是审美感在此发挥了核心的作用。彭加莱写道："数学的美感、数和形的和谐感、几何的雅致感，这是一切真正的数学家都知道的审美感……正是这种特殊的审美感，起着我已经说过的微妙的筛选作用。"也正因为此，"缺乏这种审美感的人永远不会成为真正的创造者。"[②]

尽管彭加莱在此主要是就无意识的思维活动进行分析的，但却又在一定程度上清楚地指明了美学的考虑对于科学研究有着特别的重要性。又由于数学即就构成了科学的语言，因此，数学美事实上就可被看成科学美的主要形式，特别是，科学家们往往就以对数学美的追求作为自己直接的工作目标。

具体地说，科学家们对于数学美的追求往往反映了其对于简单性和统一性的追求。例如，在理论科学的研究中，科学家们常常以简单性作为自己的工作目标，并力图通过简单性而最终达到对于真理的认识；而由实例的考察可以看出，科学中的简单性又往往是指用简单的

---

① 彭加莱：《科学的价值》，第377页，北京，光明日报出版社，1988。
② 同①，第383页。

数学公式揭示出了隐藏在复杂现象背后的深刻规律或本质，从而，这里所说的“简单性”事实上就是一种“数学的简单性”。例如，爱因斯坦就自称是一个“到数学的简单性去寻找真理的惟一可靠源泉的人”。另外，海森堡也曾指出：“我相信自然规律的简单性具有一种客观的特征，它并非只是思维经济的结果。如果自然界把我们引向极其简单而美丽的数学形式——我所说的形式是指假设、公理等等的贯彻一致的体系——引向前人所未见过的形式，我们就不得不认为这些形式是‘真’的，它们是显示出自然界的真正特征。”又“我又坦白承认，我被自然界向我们显示的数学体系的简单性和美强烈地吸引住了。你一定也有这样的感觉：自然界突然在我们的面前展开这些关系的几乎令人震惊的简单性和完整性。”①

事实上，在科学史上我们也可看到不少这样的例子，在其中正是数学的简单性给了科学家以必要的信心，从而才能在逆境中坚持自己的理论或新的创见。例如，正如第四章中所已提及的，哥白尼的日心说在最初就未能彻底地摆脱托勒密在地心说中所引进的“本轮”和“均轮”的概念，而只是把它们的数目由 77 个压缩到了 34 个；然而，却又正是这种数学上的简单性使哥白尼坚信自己理论的真理性，因为他相信“自然是喜爱简单性的”。而且，从历史上看，这事实上也就是当时的不少科学家之所以支持日心说的一个主要原因。例如，被人称

① 海森堡：《严密自然科学基础近年来的变化》，第 216—217 页，上海，上海译文出版社，1978。

为“天空的立法者”的开普勒就曾写到：“我从灵魂的最深处证明它是真实的，我以难于相信的欢乐心情去欣赏它的美”，而这就是因为“哥白尼的体系具有更大的数学简单性与和谐的缘故”。[1]

另外，海森堡并曾指出，精密科学中美的含义就在于“一部分与另一部分以及整体之间的和谐。”海森堡在此所说的“和谐性”也就是通常所谓的科学的“统一性”，而后者的主要表现形式则又往往是指人们用统一的数学公式对不同的事物或现象作出了成功的概括，从而揭示出了对象之间的内在联系或其共同本质。

例如，正如前面所已提及的，牛顿的力学研究在很大程度上就可被看成对于“统一性”的一种追求：在牛顿以前，开普勒和伽利略已从定量的角度分别对天上的物体与地面上物体的运动规律进行了研究，但这两者却被认为是互不相关的；与此相反，牛顿证明了我们可以用同样的数学公式来对这两种运动进行描述，从而就清楚地表明了两者的统一性。

与牛顿的工作相类似，爱因斯坦关于狭义相对论与广义相对论的研究也可说是对于统一性的一种追求。具体地说，爱因斯坦创立狭义相对论的动机之一就是希望能把牛顿的经典力学与麦克斯韦的电动力学统一起来。这就正如爱因斯坦本人所指出的：“狭义相对论得到了巨大的成就。它使力学和电动力学相互协调。它减少了电动力学中逻辑上互不相关的假说的数目。它对基本概念

① 丹皮尔：《科学史》，第193页，北京，商务印书馆，1975。

作了必不可少的方法论分析。它把动量守恒定律和能量守恒定律联结了起来，揭示了质量和能量的统一。"[①] 另外，爱因斯坦建立广义相对论的目的则可说是为了消除在狭义相对论中依然存在的匀速参照系与非匀速参照系的"不一致性"。这也就如爱因斯坦本人所指出的："同古典力学一样，狭义相对论在同所有其他的运动状态作比较时，保留了对某些特别优越的运动状态——惯性系的运动状态——的区分，老实说，带有这种保留甚至比起只对惟一的一个运动状态予以特殊看待（就像静态光以太理论所做的那样），更难于协调一致。"[②]

特殊地，对称性显然就可被看成统一性的一种具体表现，因此，科学家们也就往往以对称为美，并以此作为直接的工作目标。具体地说，由于对称性在历史上最初主要是一个几何的概念，因此，这事实上也就是对于几何对称性的一种追求。例如，哥白尼之所以仍然采用"本轮"和"均轮"的概念，主要地就是基于这方面的考虑。哥白尼这样写道："首先，我们应当指出，宇宙是球形的。这是因为球形是万物中最完美的形状；因为这种形状的容积最大，宜于包罗一切；因为宇宙的局部形体，即日月星辰，都是这种形状；因为万物都趋于这种形状；就像空中的水滴和别的液体一样。因此，谁也不怀疑，天空也应赋予这种形状。"[③] 另外，杨振宁则曾指出，爱因斯坦把电磁场看做时空结构，其实质就是将物理原则

---

① 爱因斯坦：《爱因斯坦文集》，第一卷，第185页，北京，商务印书馆，1982。
② 同①。
③ 哥白尼：《天体运行论》，第8页，北京，科学出版社，1973。

几何化："由于许多几何图形都是美的，物理理论借助于几何形式来表现，自然会显得优美。"①

当然，由于数学的发展，对称性的概念现已超出几何的范围并获得了更加广泛的意义。一般地说，这即是指组成某一事物或现象的两个部分之间的对等性；然而，对此我们仍然可以从数学上去把握和表现。例如，这也就正如海森堡所指出的："最终的物质理论，像在柏拉图那里一样，将以一系列重要的对称性要求为标志，……这些对称性已不能像在柏拉图的物体中那样，简单地用图形来说明，而需要用方程来解释。"②

例如，狄拉克（P. Dirac）关于正电子的预言就可看成这方面的一个实例。具体地说，1928 年狄拉克把量子力学的薛定谔方程推广到了相对论领域，得出的许多结果都同实验相符，但却遇到了电子可能有负能量的困难。按照通常的观念，负能值被认为是无意义的；然而，出于对称性的考虑，狄拉克却大胆地认为负能态是可能的，进而提出了负能区域已被电子所填满的思想。按照狄拉克的解释，这种"负能态的海洋"就是通常所说的真空。显然，按照这样的思想，如果负能区域中的电子逸出的话，在负能态海洋中就会出现一个"空穴"。我们应当怎样看待这种空穴呢？狄拉克写道："在我开始有这个想法时，我觉得在空穴和普通电子之间有对称性。"又"假如有一个洞，那个洞就是实验物理中还不知道的一种新粒

① 周义澄：《科学创造与直觉》，第 281 页，北京，人民出版社，1986。
② 海森堡：《严密自然科学基础近年来的变化》，第 169 页，上海，上海译文出版社，1978。

子，同电子的质量相同，电荷方向相反，我们可以把这种粒子叫做反电子。"[①] 这样，对于对称性的追求就直接导致了正电子的概念的产生。

综上可见，对于数学美的追求就在一定程度上为科学研究指明了努力的方向。狄拉克写道："理论物理学家把数学美的要求当做信仰的行为。它没有什么使人非信不可的理由，但过去已经证明了这是有益的目标。例如，相对论得到如此普遍的承认，其主要原因就在于它的数学美。"[②] 又"这种对数学美的欣赏支配着我们的全部工作。这是我们的一种信条，相信描述自然界基本规律的方程必定有显著的数学美，这对我们就是一种宗教。奉行这种宗教是很有益的，可以把它看成是我们许多成功的基础。"[③]

当然，应当强调的是，我们在此又不应把对于数学美的追求看成科学研究的主要或惟一的目标，毋宁说，这即是为我们更好地认识客观世界提供了一种重要的工具和方法。这也就如彭加莱所指出的："其主要对象是研究这些空虚框架的数学分析是精神的空洞游戏吗？它给予物理学家的只不过是方便的语言，这难道不是平庸的贡献吗——严格地讲，没有这种贡献，也能够作到这样一点？甚至人们无须担心这种人为的语言可能成为设置在实在和物理学家眼睛之间的屏障吗？远非如此！没有这种语言，事物的大多数密切的类似对我们来说将会永

---

① 林德宏：《科学思想史》，第333页，南京，江苏科学技术出版社，1985。
② 狄拉克："理论物理学方法"，载《自然科学哲学问题丛刊》，1982年，第四期。
③ 狄拉克："回忆那激动人心的年代"，载《科学和哲学》，1981年，第六期。

远地未知的。而且，我们将永远不了解世界的内部和谐。"[①]

9．4　解决问题的艺术

由于"问题解决"，也即如何综合地、创造性地应用已掌握的知识和方法去解决各种非常规的问题，构成了数学活动（包括数学研究与数学学习）的一个基本形式，因此，在这样的意义上，数学就常常被称为"解决问题的艺术"，因为，正是通过解决问题的实践，数学家们逐渐发展起了一整套十分有效的解题策略，而后者则不仅可以被用于数学内部，而且也可广泛地被用于人类实践活动的各个领域。

例如，正如第二章中所已提及的，就这方面的研究而言，我们应当首先肯定波利亚的贡献，因为，从历史的角度看，波利亚在此事实上起到了一种"复兴"启发法的作用。

具体地说，在人类的历史发展中曾有过这样一个时期，其间人们曾希望能找到这样一种方法，用之即可有效地从事发明创造，或成功地解决一切问题。例如，笛卡尔就曾提出过所谓的"万能方法"：第一，把任何问题转化为数学问题；第二，把任何数学问题转化为代数问题；第三，把任何代数问题归结为解方程。从现在的观点看，上述对于"万能方法"的寻求显然是过于简单了，因为，即如并不存在可以把万物点化为黄金的"哲人之

① 彭加莱：《科学的价值》，第190页，北京，光明日报出版社，1988。

石"，能有效地从事数学发现或解决一切问题的"万能方法"显然也是不存在的。然而，就基本的研究倾向而言，人们却因此由一个极端走向了另一个极端，即认为根本不存在任何关于发现的方法。在历史上后一种观念是与逻辑实证主义的"科学观"直接相联系的：逻辑实证主义明确地提出了关于"检验（证明）的方法"与"发现的方法"的区分，并认为方法论的研究应当局限于检验（证明）的范围，而发现的问题则完全属于心理学的范围，对此不需要、也不可能作出任何理性的或逻辑的分析，从而也就根本不存在任何真正意义上的"发现的方法"。由于逻辑实证主义在西方学术界中曾长期占据主导的地位，因此，关于数学发现（及至一般科学发现）方法的研究就一度陷入了停顿状态。

正是在上述的"严峻"形势下，波利亚自觉地承担起了"复兴"启发法的重任。波利亚在这一问题上的基本立场是：所谓的"万能方法"是不存在的；但是，"各种各样的规则还是有的，诸如行为准则、格言、指南，等等。这些都还是有用的。"这就是说，我们可以通过对于已有的成功实践、包括解题过程的深入研究，总结出一般性的思维方法或模式，尽管后者并非可以被机械地用以解决问题的"万能方法"，但是，它们对新的实践活动仍可起到重要的启发和指导的作用——也正因为此，波利亚就把所说的行为准则、格言和指南等统称为"启发性法则"。从而，相对于上述的两极对立而言，波利亚在此事实上就是开拓了第三种可能性，即我们可以、而且应当积极地去从事启发法的研究。

具体地说，波利亚在这一方向上曾发表了《怎样解题》、《数学的发现》和《数学与猜想》等多部著作和很多论文。在这些论著中他先后提出了这样一些启发性的模式或方法：[①] 分解与组合，笛卡尔模式，递归模式，叠加模式，特殊化方法、一般化方法，“从后向前推”，设立次目标，合情推理的模式（归纳与类比），画图法，看着未知数，回到定义去，考虑相关的问题，对问题进行变形，等等。

另外，波利亚并曾明确提出，一些“定型的”问题和建议可被看成数学启发法的核心，因为，只要运用得当，这些问题和建议就能起到“思想指南”的作用，即能给解题者一定的启示，从而帮助他们去发现好的或正确的解题方法与解答。特殊地，如果把这些问题和建议按照解题过程的四个阶段，即“弄清问题”、“制定计划”、“实现计划”和“回顾”组织起来，我们就得到了著名的“怎样解题表”。[②]

对于波利亚的上述贡献人们普遍给予了高度评价。例如，美国当代著名的数学教育家舍费尔德（A.Schoenfeld）就曾指出：“对于波利亚在复兴所谓的‘现代启发法’方面所取得的成功无论如何评价都不过分。”[③]

就我们目前的论题而言，我们在此还应特别指明以下的事实，即波利亚曾明确地强调了数学启发法的普遍

---

① 参见郑毓信：《数学方法论》，第 章，南宁，广西教育出版社，1991。
② 波利亚：《怎样解题》，XIII－XV，北京，科学出版社，1982
③ A. Schoenfeld: 《Mathematical Problem Solving》, Academic Press, Inc. 1985, P. 69

意义。

首先，按照波利亚的观点，“问题解决”即可被看成构成了人类全部活动的基本形式，并就是人类智力的集中表现。例如，波利亚写道：“解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋，正是绕过障碍、在眼前无捷径的情况下迂回的能力，使聪明的动物高出愚笨的动物，使人高出最聪明的动物，并使聪明的人高出愚笨的人。”又“解题是人类的本性。我们可以把人类定义为‘解题的动物’；他的生活充满了不可立即实现的目标。我们大部分的有意识思维是与问题相关的；当我们并未沉溺于娱乐或白日作梦时，我们的思想有着明确的目标。”① 其次，波利亚又具体地指明了数学启发法对于提高人们解决问题能力的普遍意义。这就是说，数学启发法的用途“不限于任何题目。我们的问题可以是代数的或几何的，数学的或非数学的，理论的或实际的……”② 显然，这事实上也就清楚地表明了数学对于人们智力发展的特殊意义。

尽管波利亚的上述论述主要是在五六十年代作出的，但是，这些论述的真理性又已由现代的认知科学研究和人工智能研究得到了进一步的确证。例如，现代人工智能研究的主要开拓者之一西蒙（H. Simon，中文名司马贺）就曾指出：“人类的解决问题过程……这一过程可以——而且已经时常——被比作在迷宫中的搜索。…在过

① 波利亚：《数学的发现》，第一卷，第172页，呼和浩特，内蒙古人民出版社，1980。

② 波利亚：《怎样解题》，第2页，北京，科学出版社，1982。

去三十年中，关于用以表现人类共有的解决问题任务（仅提几项：证明定理、破谜、下棋、进行投资、平衡生产线）的迷宫的性质，人们已学到了很多东西。我们关于这些迷宫的一切知识都指向同一结论：人类的解决问题过程，从最鲁莽的到直觉能力最强的，都不过是反复试验法与选择的不同程度的组合而已。选择性来自各种经验定则（或直观推断法），它们提示我们应先行探索哪些路径，已探索了的路径中哪些有希望通向目标。”[1] 又“随机时错走一步就要全部倒退，所以我们需要利用窍门和有关的知识，采取有效的解题方法。这种有效的方法就叫做启发性搜索（或选择性搜索）。”显然，西蒙的这些论述与波利亚对于启发法的强调是完全一致的。另外，值得提及的是，在实际从事解题机的研究时，波利亚的数学启发法并就构成了西蒙等人最为重要的思想渊源之一。

除去具体的解题策略以外，应当指明，数学对于提高人们的元认知水平也有着十分重要的意义。

具体地说，就解题活动而言，所谓“元认知”即是指解题者对于自身所从事的解题活动的自我意识和自我控制，包括对于数学知识和解题策略的选择，整个过程的组织，以及对于所从事工作的自我分析（评估）和自我调整等。由于这些工作与具体的认知活动相比显然属于一个更高的层次，因此通常就被称为“元认知”。另外，这正是关于数学解题过程的现代研究所揭示的一个

[1] 西蒙：《人工科学》，第176－178页，北京，商务印书馆，1987。

重要事实，即元认知也应被看成决定人们解决问题能力的一个重要因素，而数学则又正是提高人们元认知水平的一个重要途径。

例如，通过初学者与数学家解题活动的对照研究我们就可看出，两者在元认知的水平上表现出了重要的区别。具体地说，初学者往往不加思考地采取某一方法或解题途径，或总是在各种可能的“解题途径”之间徘徊，而对自己在干什么、特别是为什么要这样干始终缺乏明确的认识；另外，在沿着某一解题途径走下去时，他们又往往不能对自己目前的处境作出清醒的评估并由此作出必要的调整，而只是“一股劲地往前走”，直至最终陷入了僵局（这既是指遇到了不可克服的困难，也是指获得了某种结果但却对解决原来的问题毫无作用）而不知所措。与此相反，数学家在具体地采用某一方法或解题途径前往往对各种可能性经过了仔细的考虑；在整个解题过程中则又显得“心中有数”，即清楚地知道自己在干什么和为什么要这样干；他们能对目前的处境作出清醒的评估，并由此而作出必要的调整，特殊地，即使出现了错误，他们也不会简单地抛弃已有的工作，而是力图从中吸取有益的成分；最后，在成功地解决了问题以后，他们又能自觉地对所进行的工作进行回顾，特别是考虑是否存在更为有效的解题途径。①

应当指出，元认知水平的高低不仅对于数学解题活动有着十分重要的影响，而且对于人们有效地去从事各

① 郑毓信：《问题解决与数学教育》，第5.1节，南京，江苏教育出版社，1994。

种活动也有着十分重要的意义。事实上，在不少学者看来，这就可以被看成人类与动物的一个根本区别，即人类的行为主要地是由目标、而并非是由外部的刺激物所决定的。特别是，人类能应用可变的行动计划去适应不同的新的环境，从而就能在各种不同的环境中达到预期的目标。由于所说的“计划性”和“可变性”显然依赖于人们的元认知能力，因此，在这样的意义上，具有高度发展的元认知能力事实上就可被看成人类智慧的一个集中表现。另外，正如大家所熟知的，人们常常把思维的敏捷性、灵活性、深刻性、批判性和创造性看成是思维的品质，并认为这正是衡量人们智力或思维能力高低的重要指标；然而，由上面的分析我们又可看出，思维的这些属性与元认知的发展水平都有着直接的联系，特别是，对于内在思维活动有着清醒的自我意识并能及时地作出自我评价和必要的调整更应被看成思维的深刻性、批判性和创造性的重要表现或必要条件，从而，在这样的意义上，我们也就可以说，元认知的培养和训练正是提高思维品质的关键所在。

由于数学正是提高人们元认知水平的一条有效途径，因此，这也就从又一角度表明了数学对于人们思维的训练和培养有着特别的重要性。

最后，除去解决问题的能力以外，提出问题的能力显然也应被看成人们思维水平的一个重要表现。事实上，在不少著名科学家看来，提出问题比解决问题更为重要。例如，爱因斯坦就曾这样指出：“提出一个问题比解决一个问题更为重要，因为解决问题也许是一个数学上或实

验上的技能而已，而提出新的问题、新的理论，从新的角度去看旧的问题，却需要创造性的想象力，而且标志着科学的真正进步。”①

然而，由初学者与数学家的比较研究可以看出，这也是两者的一个重要区别，即初学者往往满足于用某种方法（包括观察、实验甚至猜测）求得了问题的解答，而不再进行进一步的思考和研究；与此相反，作为“数学传统”（第二章）的具体体现，数学家们则并不满足于各个具体问题的解决，而是致力于这样的思考：在这些看上去并无联系的事实背后是否隐藏着某种普遍的理论？这些事实能否被纳入某个统一的数学结构，等等。显然，这种思维方式正是理论思维的重要表现，而所说的差异则又清楚地表明了数学对于人们提高提出问题的能力、特别是学会理论思维有着特别的重要性。

9.5 从教育的角度看

作为全章的结束，我们再依据以上的论述对数学教育的若干相关问题作出简要的分析。

1. 工具作用与思维训练

首先，笔者以为，我们应当注意纠正这样一种倾向，即是惟一地强调数学的工具作用，并把后者与数学的思维训练功能绝对地对立起来。

具体地说，我们在此事实上就涉及到了数学教育的基本目标。如众所知，作为人类社会的一种自觉活动，

---

① 爱因斯坦、英费尔德：《物理学的进化》，第66页，上海，上海科学技术出版社，1979.

教育的一个主要特征就是其有着明确的目的性，而且，又正是所说的目的性在很大程度上决定了教学内容、教学方法乃至全部的教育过程。那么，究竟什么是数学教育的基本目标呢？从历史的角度说，对于这一问题应当说存在多种不同的意见，特别是，在此我们更可经常看到这样一种观念，即是突出地强调了数学的工具作用，也即认为数学教育的主要目标就是要帮助学习者掌握数学这样一种认识和实践活动的重要工具。

例如，作为上述观念的一种极端表现，“实用主义”在20世纪上半叶的美国就曾占据了主导的地位。这就正如豪森（G. Hawson）等所指出的：“20世纪上半叶出现的美国教学法改革，其理论建立在哲学和心理学基础之上；数学和自然科学的课程改革，情况亦是如此。学校数学的内容看来建立在一个坚实的、完全充分的知识体系的基础上，而这个体系则主要是适应这样的一个信念的，即只有可以直接应用的论题才应放在旨在为一般公众提供教育的学校中去教。因而在小学里应以计算的技能技巧为主，而在中学里则应以简单的代数、三角以及商业计算等应用为主。”① 从更为深入的层次去分析，应当指出，上述的倾向事实上并反映了这样的社会需求，即是能培养出为大规模机器生产所需要的、大量的、能够胜任简单机械劳动的廉价劳动力。

当然，从现今的角度看，把数学的工具作用仅仅局限于直接应用无疑是过于肤浅了。事实是，就如亚历山

① 豪森：《数学课程发展》，第153页，上海，上海教育出版社，1992。

大洛夫在《数学——它的内容、意义和方法》一书中所指出的，我们应在日常生活和工作、工程技术、科学研究这样三个层次上同时肯定数学的重要作用。这就是说：

“第一，我们经常地、几乎每时每刻在生产中、在日常生活中、在社会生活中运用着最普通的数学概念和结论，甚至并不意识到这一点。”

“第二，如果没有数学，全部现代技术都是不可能的。离开或多或少复杂的计算，也许任何一点技术的改进都是不可能的；在新的技术部门的发展上数学起着十分重要的作用。”

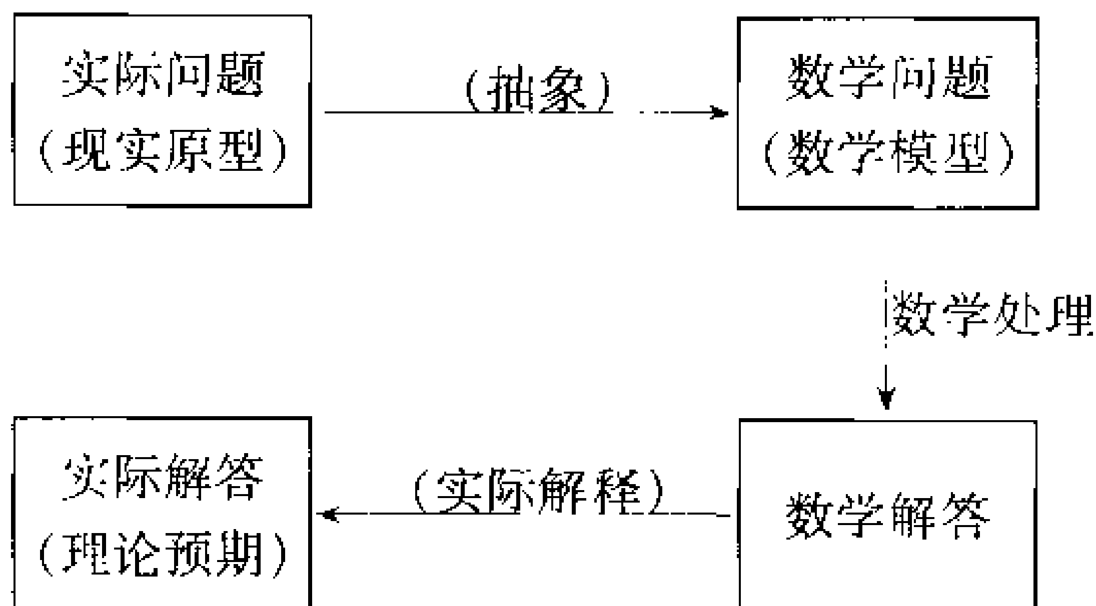
“最后，几乎所有科学部门都多多少少很实际地应用着数学。‘精确科学’——力学、天文物理学、以及在很大程度上的化学——通常都是以一些公式表述自己的定律，都在发展自己的理论时广泛应用了数学工具。没有数学，这些科学的进步简直是不可能的。……无论如何，数学几乎在所有科学中，从力学到政治经济学，都有着这样那样的应用。”

但是，现在的问题是，所说的数学的工具作用与思维的训练与培养有什么样的关系？特别是，我们是否应当把这两者对立起来，即是惟一强调数学的工具作用，而完全忽视思维的训练与培养？

与上述的观念相对立，笔者以为，在数学的工具作用和思维训练功能这两者之间事实上存在有一种相辅相成的辩证关系，特别是，数学的工具作用即就直接依赖于数学的思维。

为了清楚地说明这样一点，我们即可就数学应用的

模式作一简单的分析：



如众所知，以上即就表明了数学应用的一个基本模式。其中，所谓的“抽象”，就是指如何应用纯粹的数学语言（数学概念、符号、命题、公式等）去对客观事物或现象的量性特征作出刻画，从而得出相应的“数学模型”；其次，所谓的“数学处理”则主要地就是一个“问题解决”的过程，也即如何综合地、创造性地应用已掌握的知识和方法去解决所面临的问题。当然，无论就“抽象”或是“数学处理”而言，在已有的数学语言或方法不够用或不够理想的情况下，我们应当努力地去创造新的数学概念和方法。

显然，由以上的分析我们即已可以清楚地看出在数学的工具作用和思维训练功能之间存在的重要联系，特别是，就正是数学的思维方法为数学的实际应用提供了必要的基础。因为，所说的由“现实原型”到“数学模型”的抽象显然就依赖于数学化的思想；进而，所谓的

“数学处理”当然也离不开数学的解题策略（包括元认知）；最后，新的数学概念或方法的创造则更依赖于数学的理论思维。

从而，总的来说，纯粹的“作为工具的数学”就是不存在的；恰恰相反，数学工具作用的发挥在很大程度上就以数学思维作为必要的条件。

显然，以上的分析事实上也就清楚地表明了这样一点，即在数学教育中我们不应惟一地强调数学的工具作用（例如，在香港课程发展委员会所制定的《中学课程纲要——数学科》［1985］中，我们就可看到这样的提法：中学课程强调“将数学作为应用工具，多于作为一种思维方法”），毋宁说，我们在此应当更为重视数学思维的训练与培养。显然，后一提法与以下的观点也是完全一致的，即人们何之始终对数学予以特别的重视：“许多世纪以来，数学被看作是训练‘推理’能力的最佳学科，为什么在中小学有这么多数学课呢？无论过去还是现在，对于这个问题最普遍的回答是：‘它教你思考’。”①当然，后者也不应被理解为一种纯粹的“素养”，而应是与数学的实践活动（包括数学的实际应用）密切相关、相互渗透的，即直接关系到了我们应当如何去认识世界和处理问题。

2. 大众数学、素质教育与数学地思维

就数学教育的基本目标而言，我们自然也应提到关于“双基”的传统提法，即如中学数学教学应当“按照

① 阿蒂亚：“数学与计算机革命”，载ICMI研究丛书之一：《国际展望：九十年代的数学教育》，第78页，上海，上海教育出版社，1990。

学生在今后的成人生活、就业和升学等方面的不同需要，结合学生的生活实际和年龄特征，使学生逐步掌握代数、几何、三角的基础知识和基本技能，学会用数学的观点、态度和方法去观察和处理现实世界中数量关系和空间形式的有关问题。在教学过程中注意培养学生准确而敏捷的计算能力，一定的逻辑思维能力和图形识别能力，并帮助学生养成良好的科学态度，树立正确的数学观。”

当然，我们在此不可能对现行的教学大纲、特别是基本知识和基本技能方面的具体要求作出仔细的分析或评价，我们也不准备从历史的角度对我国数学教学大纲的历史演变过程作出回顾；与此相反，笔者在此只是想突出地强调这样一点，即数学教育目标的制订必须首先考虑社会的需要。

具体地说，笔者以为，我国的数学教育工作者必须清醒地认识到这样一点，即数学教育现正经历着“全民化”这一重要的转变，对此例如由“大众数学”、“素质教育”、“普及教育”等口号就可清楚地看出。

社会的进步，也即由工业社会向信息社会的发展无疑是促成上述转变的最为重要的因素。但是，在笔者看来，现今的主要问题已不再是如何对这一转变的必然性或必要性作出论述，而是要具体地去弄清究竟什么是“全民化的数学教育”（或者相应地，什么是“素质教育下的数学教育”）的主要内涵，从而有效地防止诸如“大众数学就意味着没有数学”这样的现象。

更为具体地说，笔者以为，这里的关键点就在于：“数学教育的全民化”是否就意味着“数学上的高标准”？

进而，什么又是所说的“高标准”的主要内容？

显然，从社会的需要这一角度去分析，[1] 对于前一问题我们无疑应当作出肯定的回答；其次，笔者以为，帮助学生学会数学地思维则就应当被看成“数学上高标准”的主要内容。[以下的提法或许可被认为是更为恰当的，即我们应当帮助学生“通过数学学会思维”（thinking through mathematics），也即应当帮助“所有的学生，而不只是少数学生，经由数学课题作思考，成为能思考的人”。]

当然，就上述目标的具体实现而言，还有大量的工作要做。例如，从教学的角度看，以下的问题就有着特别的重要性，即应如何通过日常的数学教学来培养学生的数学思维，因为“思考活动不是在获得课程内容的知能之后才出现的，而是成功的学习过程中整体的一部分，因此课程内容须能挑动思考的灵感，即使在最不起眼、最基本的课堂情境中，亦可启发思考的泉源。”

从而，如何帮助学生学会数学地思维，也就直接关系到了教学内容的选择、以及具体的教学方法。就后者而言，笔者以为，国内已有实践表明以下的作法是较为可取的，即我们不应以数学思维方法的训练和培养去取代数学基本知识和技能的教学，而应将思维方法的训练和培养渗透于日常的数学教学活动之中，也即应当以思想方法的分析去带动、促进具体数学内容的教学。因为，只有这样，我们才能真正把数学课“讲活”、“讲懂”、

① 郑毓信：《数学教育哲学》，第二部分，成都，四川教育出版社，1995.

“讲深”——所谓“讲活”，是指教师应通过自己的教学活动为学生展现出“活生生的”数学研究工作，而不是死的数学知识；所谓“讲懂”，是指教师应当帮助学生真正理解有关的数学内容，而不是囫囵吞枣，死记硬背；最后，所谓“讲深”，则是指通过数学教学教师不仅应使学生掌握具体的数学知识，而且也应帮助学生学会数学地思维。

显然，就本文的论题而言，这事实上也就表明了数学思维的训练和养成与具体的数学知识和技能的学习相比是更为重要的。

最后，就数学教育的基本目标而言，笔者以为，除去从个人的角度进行分析以外，我们还应清楚地看到数学对于整个社会、民族乃至全部人类文明进步的重要意义。这也就如前一章中所指明的：“一个没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的，一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的。”从而，我们应当努力建立民族或国家的清醒的“数学意识”。

3. 问题解决与数学地思维

如众所知，“问题解决”是美国乃至世界范围内数学教育界在80年代的主要口号，即是认为应当以“问题解决作为学校数学教育的中心”。

以今天的眼光来分析，“问题解决”这一口号应当说还是有其一定合理性的，特别是，这在一定程度上即可被看成一种时代的要求，并集中地反映了数学观的现代演变和数学教育理论研究的深人发展。

具体地说，所谓数学观的现代演变即是指由静态的

数学观向动态的数学观的转变：在很长时间内，人们往往把数学等同于数学知识（特别是“事实性结论”）的汇集，而且，数学的发展主要地又只是一个积累的过程；但是，从60年代起，在数学哲学的领域内这种静态的观点已经逐渐为动态的数学观所取代，而后者的基本立场则就是指数学主要地即应被看成人类的一种创造性活动。显然，按照动态的数学观，在数学教育中我们也就不应惟一地去强调数学知识的学习，而应更加重视如何帮助学生学会像数学家那样去工作、像数学家那样去思维。特殊地，由于问题解决构成了数学活动（包括数学研究和数学教学）的一个基本形式，因此，从这样的角度去分析，对于问题解决的突出强调也就十分自然了。其次，所谓数学教育理论研究的深入发展，在此主要地即是指关于数学学习过程的深入研究，特别是，现代的研究即已清楚地表明了这样一点：数学学习并非是一个被动的吸收过程、而是一个以学习者已有的知识和经验为基础的主动建构过程。显然，按照这样的观点，最好的学习方法就是在干中学，也即所谓的“学数学就是做数学”（“knowing” mathematics is “doing” mathematics），从而，数学学习心理学的现代研究也就从理论上为“以问题解决作为数学教育的中心”提供了重要的依据。最后，又如前面所已提及的，人类社会由工业社会向信息社会的转变已对数学教育提出了新的更高的要求，特别是，由于“21世纪的劳动力将是较少体力型而更多智力型、较少机械的而更多电子的、较少稳定的而更多变化的”，因此，“信息社会已经创造了一个在其中巧干要比单纯苦干

重要得多的世界经济。这一经济需要的是智力上适合的劳动者，即善于吸收新思想、能适应各种变化……并善于解决各种复杂问题的劳动力。"① 从而，从数学教育的角度看，这也就对提高学生解决问题的能力提出了直接的要求。

尽管"问题解决"有其一定的合理性；但是，已有的实践也已表明，这一口号也有其一定的局限性，特别是，这容易导致这样的倾向，即无论是学生或教师都容易满足于具体解答的获得，而未能从理论的角度作出进一步的思考和研究，包括如何对已获得结果的正确性作出证明、对结论进行推广、从方法论的角度去作出改进等；另外，又如前面所已提及的，就数学教育的基本目标而言，我们显然又不应惟一强调解决问题的能力，而应同时注意培养学生提出问题的能力。

也正是基于这样的考虑，在很多学者看来，与"问题解决"相比，"数学地思维"这一提法就是更为恰当的。例如，美国"问题解决"的主要代表人物之一舍费尔德就曾这样写道："现在让我回到'问题解决'这一论题。尽管我在85年出版的书用了《数学解题》这样一个名称，我现在认识到这一名称的选用是不很恰当的。我所考虑的是单纯的问题解决的思想是过于狭窄了。我所希望的并非仅仅是教会我的学生解决问题——特别是别人所提出的问题，而是帮助他们学会数学地思维。不用说，问题解决构成了数学思维的一个重要部分，但这并

① NRC:《Everybody Counts - A report to the Nation on the Future of Mathematics Education》, 1989, P. 11 & P. 1

非是全部的内容。"①

当然，即如对"问题解决"不能作狭义的理解，我们在此也应正确、全面地理解"数学地思维"的内涵。

第一，本章的论述显然已经表明，对于数学的思维训练功能我们不能惟一地理解成"数学有利于人们逻辑思维的发展"；恰恰相反，数学不仅有助于人们逻辑思维的发展，而且对于人们提高创造性能力也是十分有益的。

例如，上述关于数学应用模式的分析事实上即已表明"数学化"的过程主要地也应被看成一种创造性的劳动。因为，首先，"数学模型"的建构应是"恰如其分"的，即既应包含对于"现实原型"的必要简化，同时又能反映事物或现象的本质，从而，这就从一个侧面表明了这一过程的创造性质；其次，为了解决所面临的问题，我们又必须创造性地去应用已有的知识和方法，从而，这也就不应被看成对于现成算法或解题程序的机械应用，或者说，这同样清楚地表明了这一过程的创造性质。

当然，数学的以下特征可以说是最为清楚地表明了数学对于人们创造性能力的特殊意义，即数学的对象正是人们抽象思维的产物，而且，其在一定程度上更可被看成"思维的自由想象与创造"。从而，就如彭加莱所指出的，"数学科学是人类精神从外界借取的东西最少的创造物之一，……它……充分地向我们表明，当人类精神越来越多地摆脱外部世界的羁绊时，它能够创造出什么东西。"又由于创新的能力事实上即可被看成人类的最大

① A. Schoenfeld: "What is all the fuss about problem solving?" ZDM, 1991, No. 1.

特征：人类“具有发明发现和创意创新的能力，而这种能力正是一切其他生物几乎不具有的、人类独特的本领。”因此，这事实上也就清楚地表明了这样一点，即“要启发人类独有的这种最高贵的性能，莫过于妥善利用数学教育。”①

第二，鉴于创新在数学中的重要地位，我们显然也就可以得出这样的结论：数学并不总是那么严格的；恰恰相反，我们应当明确肯定猜测、想象、直觉（包括审美直觉）等非逻辑因素在数学中的重要作用。

例如，在得出明确的结论之前，我们显然必须对结论的内容作出猜测，同样地，在作出严格的证明之前，我们又必须对证明的思路作出猜测；而且，就实际的过程而言，这又往往依赖于不断的尝试与改进（可参见3.1节）。另外，又如彭加莱关于发明创造本质的分析所清楚地表明的，想象力和直觉对于数学中的创新也有着特别的重要性。当然，我们在此不能停留于想象和直觉，因为，“它（们）不能给我们以严格性，甚至不能给我们以可靠性。”从而，总的来说，逻辑与直觉就构成了数学创造的双翼。这也就如彭加莱所指出的：“逻辑和直觉各有其必要的作用。两者缺一不可。惟有逻辑能给我们以可靠性，它是证明的工具；而直觉则是发明的工具。”②

显然，如果采用现代发明心理学的术语，以上的分析即就清楚地表明了：数学有利于人们右半脑和左半脑

---

① 科日艾布斯基语，转引自米山国藏：《数学的精神、思想和方法》，第197～198页，成都，四川教育出版社，1986。

② 彭加莱：《科学的价值》，第85页、第202页，北京，光明日报出版社，1988。

的均衡发展，而后者事实上就可被看成充分发挥人类创造性才能的必由之路。

最后，除去逻辑与直觉的辩证统一以外，我们还可从认知与元认知的关系更为深入地揭示数学对于人们思维发展的特殊意义。

具体地说，正如前面所已提及的，学习心理学的现代研究已经清楚地表明了元认知在人们认知活动中的重要作用。更为一般地说，我们在此并就直接涉及到了学习活动的本质，即其不仅是对于所学材料的识别、加工和理解，而且也是对于上述过程的自我监控和调节，更包括了对于自身认知结构的改善或重组。例如，著名数学教育家斯根普（R. Skemp）就曾指出："这就是我对于学习的理解：这即是机体内在的指导系统的改进过程，从而就能够更好地发挥作用。"[1]由于数学对于提高人们的元认知能力有着特别的重要性，因此，这也就从又一角度清楚地表明了数学对于人们思维训练和培养的重要意义。

4. 数学的"善"与"恶"

以上的分析即已表明了数学对于人们思维发展的重要性，从而，如果借用伦理学中"善"与"恶"的概念，这就可以说是从一个侧面表明了数学的"善"，即其对于人类的智力发展和自我完善有着特别的重要性。

事实上，除去思维的发展以外，我们还可从更为广泛的角度去论及数学的"善"，特别是，我们在此并可具

---

① R. Skemp:《The Psychology of Learning Mathematics》, Lawrence Erlbaum Associate Inc., Pub., 1987.

体地指明数学的“德育功能”。例如，前苏联的著名数学家辛钦就曾指出，数学可以培养人正直与诚实的品质，也可以培养人的顽强与勇气。颇有趣味的是，辛钦的上述结论并就是与香港大学的肖文强先生经由参与国际数学奥林匹克竞赛所得出的体会十分一致的：“练就清晰的表达能力、解决疑难的韧力和有学术真诚心，这就是数学奥林匹克竞赛给少年选手所带来的好影响。”① 另外，克莱因的以下论述则就是从一个更为广泛的角度指明了数学对于人类的特殊意义：“讨论这种人类理性的成就，在一定程度上能增强我们对文明的信心，这种文明在今天面临着就毁灭的危险，燃眉之急可能是政治上和经济上的。在这些领域中，至今还没有充分的证据表明人类的力量能克服自身的困难，进而建设一个合理的世界。通过研究人类最伟大和最富于理性的艺术——数学，则使得我们坚信，人类的力量足以解决自身的问题，而且到现在为止人类所能利用的最成功的方法是能够找到的。”②

上面的论述是很有道理的；但是，笔者以为，在充分肯定数学的积极意义的同时，我们也应清楚地看到数学所固有的局限性，从而才能更好地发挥数学的“善”，并有效地防止数学的“恶”。

具体地说，所谓“数学的‘恶’”，在此即是指如果缺乏应有的自觉性，那么，数学的固有特性就很可能导

---

① 肖文强：“国际数学奥林匹克竞赛随想录”，载《科技导报》，1994年，第153期。

② 克莱因：《西方文化中的数学》，第511页，台北，九章出版社，1995。

致某些消极的后果，包括不应有的研究思想、学术态度、乃至人生哲学等。

例如，如果过分地强调定量分析，则就容易使人忽视对于事物和对象在整体上的把握以及对其本质的深入分析，而后者与前者相比显然是更为重要的。事实上，在笔者看来，这也就是在数学教育中所经常可以看到的一种弊病，即只是满足于对教学结果（特别是，即如“多重选择题”这样的考试成绩）的定量分析，而忽视了对于学生学习过程、特别是内在思维过程的深入研究与分析，而这对于我们努力提高教学质量显然是十分不利的。

又例如，如果过分地强调数学创造的自由性，则就很容易导致“为数学而数学”，特别是把美的追求看成数学研究的惟一目标。值得指出的是，这不仅会对数学的发展造成极大的威胁，而且，就研究者个人而言，也很容易造成“闭门造车，孤芳自赏”，甚至是“妄自尊大”。事实是，如果与自然科学家相比较，上述的现象在数学中显然是更为常见的，从而，这也就不得不说是数学所容易导致的一种“恶”。

再者，对于“问题解决”的不恰当理解，则就很容易造成把数学变成了解题学，并把题海战术看成数学教学的主要手段。显然，对中国的数学教学来说，这是一种应当予以特别警惕的危险倾向。

最后，数学甚至也可能成为人们“超然自逸”的一种手段。例如，这就正如爱因斯坦所指出的：“至于艺术上和科学上的创造，那么，在这里我完全同意叔本华的

意见，认为摆脱日常生活的单调乏味，和在这个充满着由我们创造的形象的世界中去寻找避难所的意愿，才是他们的最强有力的动机。这个世界可以由音乐的音符组成，也可以由数学的公式组成。我们试图创造合理的世界图像，使我们在那里面就像感到在家里一样，并且可以获得我们在日常生活中不能达到的安定。"[①] 也许这种动机对于数学的发展来说并不是一件坏事，但是，这无疑会极大地加重数学家"孤芳自赏"的倾向，更不能防止相应的研究会在现实世界中产生研究者自己所不期望的消极后果。

当然，以上所说的种种数学的"恶"，实质上都只是缺乏自觉性的一种表现，从而，就如前一章中关于"数学理性"的分析所已指明的，我们在此也不能因此而贬低了数学的价值，勿宁说，所需要的即是一种更大的自觉性。

最后，我们愿意以肖文强先生关于数学教育目标的一段分析作为本章的结束。肖文强先生在此借用了清代文学家袁枚关于"学、才、识"的论述来说明数学教育的目标："学、才、识正好借用以概括三项数学教育目的，即（甲）思维训练、（乙）实用知识、（丙）文化素养。"肖文强先生并进一步指出："单是学的传授，仅是狭义的数学教育而已，才、学和识三者兼顾才是广义的数学教育。这种广义的数学教育不把数学仅视作一件实用工具，而是通过数学教学达至更广阔的教育功能，包

---

① 爱因斯坦：《爱因斯坦文集》，第一卷，第285页，北京，商务印书馆，1982

括数学思维延伸至一般思维，培养正确的学习方法和态度、良好学风和品德修养，也包括从数学欣赏带来的学习愉悦以及知识的尊重。"[1] 显然，肖文强先生的这一意见与这一部分中关于数学文化价值的分析是完全一致的。最后，肖先生在这一文章中着重引用了袁枚的以下论述："学如弓弩，才如箭镞，识以领之，方能中鹄。"显然，这事实上也就清楚地表明了在上述三个方面之间所存在的辩证关系，特别是，与具体数学知识的学习相比，数学的文化价值（包括思维训练和文化素养）是更为重要的。当然，作为问题的另一方面，正如上面所已提及的，我们又应强调："才"和"识"的培养必须渗透于"学"的传授，这也就是说，数学文化价值的充分发挥不能依赖于空洞的说教，而必须通过实际的数学活动、特别是数学教学才能真正得以实现。

---

① 肖文强："数学史与数学教育"，载《数学传播》，台北，1992年，第九期。

结束语　数学教育的社会－文化研究

我们将以关于国际上数学教育的社会－文化研究的简要介绍作为全书的结束。这主要包括：①数学教育的社会维度；②（数学）教室文化；③民俗数学与数学教育。

一、数学教育的社会维度

所谓“数学教育的社会维度”，即是把数学教育看成整个社会－文化系统的一个有机组成成分，并从这样的角度对数学教育的各个问题作出具体的分析。例如，在此首先涉及到的就是数学教育的目标。

事实上，作为人类的一种自觉活动，这正是全部教育工作的一个主要特征，即其有着明确的目的性；而且，就现代社会而言，所说的教育目标又在很大程度上可被看成社会需要的一种直接反映，特别是，这集中体现了一定社会集团的利益或愿望。

例如，从这样的角度去分析，我们就可较好地理解

资本主义社会的教育何以长期采取“双重的目标”，即对大多数学生的低要求和少数学生的高标准，因为，这事实上集中地体现了资产阶级的需要，即一方面培养出大批能够胜任简单机械劳动的劳动力——从而，对大多数学生来说，所需要的就只是“健壮的体格、灵巧的双手和简单的技能”；另一方面，对于少数学生的高标准则就具体体现了培养未来社会上层人士的需要。显然，这也就最为清楚地表明了资本主义社会教育的阶级性质。

一般地说，我们可以明确提出如下的“关于数学教育目标的社会性准则”：数学教育应当充分体现社会的要求，培养出社会需要的人才；[①] 另外，从这样的角度去分析，社会的进步显然也应当被看成促进数学教育改革的一个重要动力，特别是，我们即应在下述的意义上明确肯定数学教育的时代性质：数学教育必须与社会的进步相适应，而这又不仅是指数学教育应当充分反映社会的需要，而且也是指数学教育应当充分利用现代社会所提供新的物质和文化条件——容易看出，后者也就是实现前一目标的一个重要保证。

特殊地，笔者以为，这事实上就为我们更好地理解目前在世界范围内蓬勃开展的数学教育改革运动提供了重要的启示，因为，从根本上说，所说的数学教育改革运动就可被看成社会进步的一个直接产物：与人类社会由工业社会向信息社会的发展相适应，我们应当努力创造信息时代的数学教育。

---

① 参见郑毓信：《数学教育哲学》，第三章，成都，四川教育出版社，1995。

例如，在笔者看来，这种鲜明的时代性就可被看成80年代末在美国兴起的新的数学教育改革运动的一个主要特征。具体地说，作为这一改革运动的主要指导性文件之一，《人人算数》就曾围绕社会的进步具体地论述了21世纪对于劳动力的不同要求："21世纪的劳动力将是较少体力型、而较多智力型的，较少机械的、而更多电子的，较少稳定的、而更多变化的。"又"信息社会已经创造了一个在其中巧干要比单纯苦干重要得多的世界经验。这一经验需要的是智力上适合的劳动者，即善于吸收新思想、能适应各种变化……并善于解决各种复杂问题的劳动力。"[①] 事实上，信息社会的一个主要特征就在于其中的大多数人都将从事信息的管理与生产，也即主要从事脑力劳动，从而与工业社会对大多数学生的低要求不同，信息社会所提出的就是一种普遍的高要求，也即要求未来的劳动力普遍地具有较高的智力水平。

除去单纯从社会生产的角度分析以外，美国的数学教育工作者还从社会民主化的角度对所说的"普遍的高标准"进行了论证：与工业社会严格的阶级划分不同，现代的民主化社会要求社会的每个成员都应成为社会平等的一员，即具有同等的权利（包括学习和工作的权力等），并能在社会的政治生活中同样发挥积极的作用。显然，教育上普遍的高标准正是消除就业机会上不平等现象的一个重要前提；另外，为了积极地参与社会的政治生活，也就要求相应的教育体制能够充分发挥每个成员

① NRC:《Everybody Count——A report to the Nation on the Future of Mathematics Education》, 1989, P. 11 & P. 1.

积极参与、努力进取的精神，并使之具有高度发展的理性思维（包括批判分析和逻辑思维能力）和创造性才能。

容易看出，这种对于未来社会合格公民的要求与前述关于未来劳动者普遍的高要求是完全一致的。从而，总的来说，社会的发展就决定了我们必须用“普遍的高标准”去取代先前的“双重目标”。这也就如《人人算数》中所指出的：“在历史上，美国的学校是围绕双重目标而设计的：教给大多数学生在工业或农业中终身工作所需要的基本技能，对少数精英——他们将进入高等院校并最终成为社会的上层分子——则实现彻底的教育。由于社会的要求已经发生了变化……原先只适用于少数人的高标准现在必须成为普遍的目标”。[①]

所说的“普遍的高标准”当然也包括了数学上的高标准。事实上，正如《人人算数》中所指出的，“先前只是对那些将从事科技工作的人所要求的数学上的高标准，现已成为信息社会中合格劳动者必要基础的核心成分”。[②]这就是说，数学上“普遍的高标准”即应被看成具有特别的重要性。

就信息社会的数学教育而言，我们还应特别提及计算机技术迅速发展所造成的巨大影响。

首先，计算机技术的迅速发展和广泛应用大大加强了先前业已存在的“数学化倾向”，或者说极大地扩展了

---

① NRC：《Everybody Count——A report to the Nation on the Future of Mathematics Education》，1989，P. 11.

② 同①。

数学的应用范围，以致信息时代就可说是一个“数学化的时代”。这就正如《学校数学课程和评估的标准》这一文件中所指出的：“计算机处理大量信息的功能使得在诸如贸易、经济、语言、生物学、医药、社会学等领域中实行量化并对信息进行逻辑分析成为可能，特别是在社会科学与生命科学中已经造成了巨大的变化。事实上，定量分析的技术几乎已经渗透到了智力活动的所有领域。”① 显然，这种“数学化”的趋势也就使得数学中普遍的高标准成为历史的必然。

其次，计算机技术的迅速发展对于数学教育的重要涵义还在于其为数学教育提供了新的发展前景。具体地说，第一，计算机（包括计算器）技术的迅速发展，使得人们能够彻底摆脱片面强调计算技能的传统数学教育思想的束缚，并使得计算能力低下不再成为部分学生进一步学习的障碍。例如，借助于新设计的计算器即使是一些在代数学和三角学方面基础较差的学生也仍然可以继续学习微积分和统计数学。第二，借助于计算机和计算器，人们就有可能克服传统计算方法的局限性，从而使得社会生活的实际问题真正成为学校数学教学的组成部分，而这对于提高学生的数学能力，包括养成正确的数学观念和态度等，显然是十分有利的。第三，计算机（和计算器）技术的迅速发展为数学教学提供了新的有效手段。例如，图像计算器和计算机的应用就为函数的教学和空间想象力的培养提供了十分有效的手段。第四，

① NCTM: 《Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics》, 1989, P. 7.

特别重要的是，计算机的广泛应用事实上是为学生提供了一个新的更为有效的学习环境。例如，借助于合适的程序，学生就可相对独立地去从事数学的学习和探索，而不必过分地依赖于教师的帮助和指导。显然，从这样的角度去分析，计算机技术迅速发展的意义主要地并不在于为传统数学教学思想的实施提供了新的工具，而是为数学教育的改革开拓了新的广阔前景。也正是这样的意义上，美国数学教育界认为："在众多促进数学教育改革的因素中，现代技术具有最大的潜在的革命性影响。"①

综上可见，正是人类社会由工业社会向信息社会的过渡以及计算机技术的迅速发展为美国新的数学教育改革运动提供了直接的社会背景，或者说，数学教育的彻底改革正是时代发展的必然要求。这也就正如《人人算数》中所指出："今天的教育继承了工业时代的体制，从而就不应错误地被用来培养面向信息时代的儿童。"②

应当指出，"数学上普遍的高标准"事实上也可被看成以下诸多口号的一个重要内涵，即如"大众数学"、"素质教育"等。另外，为了促使我国的数学教育能更好地实现由"应试教育"向"素质教育"的重要转变，笔者认为，重要的一环就在于：我们应当清楚地认识数学教育的时代性质，因为，只有这样，我们才能更好地理解"数学素质教育"（或者说"素质教育下的数学教育"）的深刻内涵。

---

① NRC：《Reshaping School Mathematics: a Philosophy and Framework for Curriculum》，1990，P. 22.

② 同①，第11页。

例如，在笔者看来，就只有基于对信息在未来社会特殊重要性的认识，我们才能更好地认识“培养学生理性批判能力”的重要性；又只有从民主社会和开放社会的角度去分析，我们才能深刻理解数学教育何以应当注意培养学生的社会沟通能力，特别是，应当帮助学生学会容忍异己和欣赏别人，从更深的层次看，也即应当养成一种“多元文化”的观念。（正是从后一角度去分析，笔者以为，以下一段引自台湾一位小学数学教师的言论的确代表了数学教育的重要进步：“我从孩子们的日记中看到他们分析事理的能力愈来愈强；从课堂中听到他们使用的词汇愈来愈清晰有理；从他们的同学互动中感觉到容忍与爱心的滋生，一切的一切，让我觉得不只是与他们共同讨论数学而已，重要的是培养一个会做理性批判思考、会主动学习、会容忍异己欣赏别人以及有世界观的国民。”①）

再例如，考虑到未来社会发展的迅速性以及由此而造成的职业的多变性，我们无疑又应帮助学生养成主动学习的精神和终身学习的能力，从而才能更好地适应社会的需要；另外，现代技术的迅速发展显然也对数学教育提出了新的更高要求。例如，正是基于这样的认识，美国数学教师全国委员会（NCTM）在其新颁布的《数学课程标准［2000］（讨论稿）》中，不仅将“技术性原则”列为作为全部课程标准理论基础的六条指导性原则之一（原则六），并就把“数学教学应当为学生进入技术性不

① 林文生、邬瑞香：《数学教育的艺术与实务》，第21页，台北，心理出版社，1999。

断增强的社会作好准备”作为这一原则的一个重要内容。考虑到现代技术的迅速发展，这一作法显然不仅十分必要，而且也十分重要。[1]

其次，就数学教育的社会性质而言，笔者以为，其又一重要涵义在于以下的事实，即数学教师不应被看成数学教育活动的惟一主导力量，恰恰相反，我们在此应当清楚地看到整个“数学教育共同体”的共同作用。

事实上，由以上的分析我们已经可以看出，就数学教育目标的具体实施而言，教师只是在整个教育体制与教育对象之间起了一个“中介”的作用。这也就是说，教师的职责就在于如何依据学生的具体情况与具体的教学环境自觉地去贯彻、落实总的教育目标。另外，作为数学教育社会体制的具体分析，我们则又应当看到，教师事实上构成了“数学教育共同体”的一个成员，而数学教育目标的成功实施则取决于这一共同体各个成员——除数学教师外，其中还包括有数学教育政策（教学大纲）的制订者、数学教材的编写者和审定者、教学管理人员、数学考核设计人员，等等——的共同努力。

例如，正如人们所熟知的，教师在很大程度上即是按照教学大纲和教材来进行教学的；另外，又如“应试考试”这一术语所已清楚地表明了的，就现实而言，考试的方法和内容又在很大程度上对学校的数学教学工作起到了导向的作用。（正是基于这样的思考，笔者以为，“教育松绑”就是一个很好的提法。就教师而言，这又不

---

① 郑毓信：“美国《数学课程标准［2000］》简介”，载《中学数学教学参考》，1999年，第七期。

仅是指考试不应成为数学教学工作的指挥棒，而且也是指教材编写人员和各级教学管理人员应当为广大的数学教师充分发挥自己的创造性才智留下充分的余地。）

另外，也正是从这样的角度去分析，笔者以为，这事实上就应被看成决定数学教育改革运动成败的一个重要因素，即其能否成为“数学教育共同体”各个成员共同的自觉行动。特殊地，如果一个改革运动仅有来自理论研究者的积极性，而没有能得到广大数学教师的热情支持，或者说，这只是一个“自上而下”的政府行为，从而也就未能很好地调动广大教师的积极性，那么，这一改革运动的失败就不可避免。

最后，从文化的角度进行分析，我们在此还应看到整体性的文化传统对于数学教育的重要影响。

特殊地，由于东西方有着不同的文化传统，因此，通过对照分析我们就可较为清楚地认识中国传统文化对于数学教育的重要影响，尽管后者主要地即是以一种潜移默化的形式发挥作用的。

例如，按照张奠宙先生的分析（“中国传统文化与数学教育”，数学教育高级研讨会，1998），东西方的数学教育具有以下的不同特征（应当指明，这两者事实上应被看成两个极端的情况，而在这两者之间则可区分出一系列的中间状态。而且，按照张奠宙先生的分析，这种“由东向西”的变化并是与以下的排列次序大致相对应的：大陆，港台，东亚，俄国，西欧，美国）：

东方：考试严厉，教师中心，注重演练，负担过重，强调严密，形式演绎，重视模仿，相对平均，弱于自信；

西方：考试温和，学生建构，强调理解，课业不足，注意趣味，非形式化，注重创造，两极分化，善于表达。

[作为一种补充，笔者以为，“规范性”和“（个体）发展性”可被认为最为集中地表明了东西方数学教育的差异。]

张奠宙先生并从“社会文化中的教育观念”、“中国古代数学传统与近代的数学观”和“中国数学教育的历史渊源”等方面对造成“东方数学教育传统”的文化原因进行了分析。例如，所谓的“社会文化中的教育观念”，即是指深深扎根于中国传统文化之中的“苦读+考试”的观念。前者主要包括：①儒家文化：现世功业，与修行来世的哲学不同；②家庭期望：望子成龙，养不教，父之过，光宗耀祖，数学必须是100分；③学习传统：寒窗苦读，读书不必快乐，兴趣居于次要地位；④教师中心：天地君亲师，传道，授业，解惑。后者则包括：①科举争胜：读书的目的是通过考试，“好胜”取代了对大自然的“好奇”；②八股程式：代圣贤立言，固守套路，不求创造；③教育古训：熟能生巧，背诵模仿为主；④试卷为本，一张考卷定终身，评价机制僵化，视发明创造为“末技”。

尽管张奠宙先生在此所给出的只是一个简单的纲要，但是，这又的确清楚地表明了文化传统对于数学教育的重要影响。

作为一种对照，笔者在此并愿简单提及在西方社会十分流行的一些传统观念，即如认为并非所有人都能学好数学，特别是，这往往被看成“来自中等以上白人家

庭的男性”的一种“专利”，从而就表现出了对于女性、少数民族与来自贫困家庭的儿童的排斥。值得指出的是，所说的不平等性现象已经引起了美国数学教育工作者的高度重视。例如，在美国数学教育全国委员会新颁布的《数学课程标准［2000］（讨论稿）》中，“平等性原则”就被列为六项指导性原则中的第一项，也即认为应当努力改变女性、少数民族和来自贫困家庭的儿童往往不能得到应有的数学教育的现象。显然，这一原则的提出事实上也可被看成对于文化传统的一种自觉反思和批判，从而就从又一角度清楚地表明了文化传统对于数学教育的重要影响。

综上可见，我们就应明确肯定数学教育的社会性质，并应清楚地看到数学教育与整体性文化传统的重要联系。特殊地，在笔者看来，这事实上也就为中国的数学教育工作者提出了一个十分紧迫和重要的任务，即应努力建立符合时代需要和中国国情的数学教育。

二、（数学）教室文化

相对于数学教育社会维度的分析而言，关于“（数学）教室文化”（the culture of the mathematics classroom）的研究可以说采取了一种微观的视角，因为其所着眼的只是教室这样一个小环境中所进行的数学教学活动，也即是以数学教师和学生作为考察的对象，而不再关注整个数学教育体制的运作情况（或者说，整个“数学教育共同体”的相互关系）；另外，由于采取了文化的视角，

因此，研究者们在此所主要关注的就并非是教学内容、教学方法等这样一些较为“明显”的成分，而是教师和学生们所具有的各种与数学教学直接有关的观点、信念、价值观等。在他们看来，尽管后者都只是一些“隐蔽”的成分，但却仍然对于数学教学活动有着十分重要的影响。

例如，这就正如 M. Nickson 所指出的：“由于文化的主要特征即是涉及到了看不见的信念和价值观，因此，数学教室的文化在很大程度上也就取决于教师和学生们所具有的与学科有关的隐蔽的观念。”特别是，“通过采取文化的观点，我们就可更为清楚地认识教学和学习的情景中所包含的这些‘看不见的成分’对数学教学的成功或失败有着怎样的影响。”①

由于教师在教室中的数学教学活动中发挥着主导的作用，因此，教师所具有的观点信念等对于数学教学就有着特别重要的影响，后者并就集中地表现为所谓的“数学观念”和“数学教学观念”。

事实上，已有的关于“（数学）教室文化”的研究在很大程度上就是围绕这样两个主题展开的，即是希望能对教师的数学观念和数学教学观念作出具体的界定，并清楚地指明这些观念对于数学教学活动的重要影响。

例如，按照英国学者 P. Ernest 的观点，对于教师所具有的数学观念可以大致地区分出以下三种不同的类

① M. Nickson: “The Culture of the Mathematics Classroom: an Unknown Quantity?” D. Grouws (ed): 《Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning》, Macmillan, 1992, P. 102.

型：[1]

（1）动态的、易谬主义的数学观。这是指把数学看成人类的一种创造性活动，从而，数学主要地就是一种探索的活动，并一定包含有错误、尝试与改进的过程，更必然地处于不断的发展和变化之中。

（2）静态的、绝对主义的数学观。这是指把数学看成无可怀疑的真理的集合，这些真理并是很好地组织起来，即构成了一个高度统一且十分严密的逻辑体系。

（3）工具主义的数学观。这是指把数学看成适用于各种不同场合的事实性结论、方法和技巧的汇集，由于这些事实、方法和技巧是为着不同的目的、彼此独立地发展起来的，因此，数学不能被看成一个高度统一的整体。

除 P. Ernest 的上述论点外，其他学者在这方面的研究结论也是较为接近的。例如，M. Nickson 就曾突出地强调了"'形式主义'的传统"与"发展的、变化的数学观"的对立，而他说的"'形式主义'的传统"和"发展的、变化的数学观"事实上就是与 P. Ernest 所说的"静态的、绝对主义的数学观"和"动态的、易谬主义的数学观"十分接近的。

当然，又如大多数研究者所清楚地意识到了的，他们所提供的只是一种极大地简化了的"图像"，而这又不仅是指在这些"极端"情况之间还存在有多种可能的"中间状态"，而且也是指以下的事实，即不仅不同的数

---

[1] P. Ernest: "The Impact of beliefs on the teaching of mathematics", paper prepared for ICME VI, Budapest, 1988.

学教师可能具有完全不同的数学观念，即使是同一个教师其数学观念也未必自洽。显然，后者也就更为清楚地表明了这样一点，即我们在此所说的“数学观念”未必是一种系统的理论观点，也可能是一些素朴的认识，其持有者更未必对此具有清醒的自我意识。

另外，所谓的“数学教学观念”则是指关于应当如何去从事数学教学的观点和看法等。显然，数学教学观念的涉及面是十分广泛的。例如，这就直接涉及到了以下的各个问题：什么是数学教育的根本目标？教师在教学中应当发挥怎样的作用？学生在教学过程中具有怎样的作用？什么是合适的教学方法？等等。

一些研究者提出，对于教师所具有的数学教学观念我们也可大致地区分出以下的四种类型：[①]

(1) 以学生为中心的数学教学思想。即是认为数学教学应当集中于学习者对于数学知识的建构。

(2) 以内容为中心、并突出强调概念理解的数学教学思想。即是认为应当围绕教学内容来组织教学，并应特别重视概念的理解，从而，在教学中我们就不仅应当讲清“如何”，而且还应讲清“为什么”。

(3) 以内容为中心、并突出强调运作的数学教学思想。即是认为数学教学应当特别重视学生的运作及其对于各种具体的数学技能（法则、算法等）的掌握。

(4) 以教学法为中心的数学教学思想。这种教学思想的主要特征就在于：与特定的教学内容相比，教师更

---

① T. Kuhs & D. Ball:《Approach to teaching mathematics: Mapping the domains of Knowledge, Skills and Dispositions》, Machigen State University, 1986.

加重视教学法方面的问题，即如教学环境的布置，教学环节的恰当组织等。

尽管不同的研究者可能具有不同的研究角度或不同的研究重点，但是，从现今的情况看，这是一个较为突出的现象，即研究者们普遍认为与数学教学观念相比，数学观念是更加重要的，也即认为正是数学教师所具有的数学观念在很大程度上决定了他是以什么样的方式从事教学活动的。

例如，正是在这样的意义上，法国著名数学家托姆(R. Thom)写道："所有的数学教学法都建立在一定的数学哲学之上，尽管后者很可能只是很糟糕地界定了的，它的表述也是十分糟糕的。"[①] 另外，英国著名数学教育家斯根普则曾这样写道："我们并不是在谈及关于同一数学的较好的和不那么好的教法。只是在经过了很长一段时期以后，我才认识到并非是这样的情况。我先前总认为数学教师都在教同样的科目，只是一些人比另一些人教得好而已。但我现在认为在'数学'这同一个名词下所教的事实上是两个不同的学科。"[②]

上述的断言应当说有一定的道理，因为，如果一个数学教师所具有的是"静态的、绝对主义的数学观"，那么，他无疑就会倾向于把数学知识看成是一种可以由教师传递给学生的纯客观的东西，从而，数学学习就不应

---

① M. Nickson: "The Culture of the Mathematics Classroom: an Unknown Quantity?" D. Grouws (ed): 《Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning》, Macmillan, 1992, P. 102.

② A. Thompson: "Teacher's Beliefs and Conceptions: a synthesis of the research". D. Grouws (ed): 《Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning》, Macmillan, 1992, P. 133.

是一种探索性的活动。另外，对于任何问题又都必定存在惟一正确的解答和惟一合理的解题途径，而所说的正确性和合理性则又完全取决于教师的裁决。与此相对照，如果一个数学教师所具有的是“动态的、易谬主义的数学观”，那么，他在教学过程中就会大力提倡学生的参与，包括问题解决、合作学习、批判性讨论等，另外，对学生在学习过程中产生的错误教师也会采取较为容忍的态度，并通过师生的共同努力来消除错误，而不是简单地求助于教师（或教材）的权威。

再例如，如果持有“形式主义的数学观”，教师无疑就会认为数学教学应当清楚地指明概念的内在联系；然而，如果所持有的是“工具主义的数学观”，那么，数学教师就会突出地强调教师的示范作用，并认为学生的职责就是记忆和模仿。

尽管我们应当明确肯定数学观念对于数学教学活动的重要影响，但是，笔者以为，这又不能被看成惟一重要的因素，因为，所说的数学教育观念事实上还包括有一些相对独立的成分。具体地说，我们在此首先即应看到关于数学教育目标的思考和认识。事实上，在笔者看来，以上的分析都建立在这样一种认识之上，即认为数学教育的基本目标就是要帮助学生学会数学（当然，对于所说的“数学”存在有多种不同的理解）。但是，我们在此显然又应考虑这样的问题：究竟什么是数学教育的根本目标？特别是，什么是数学教育的社会职责？笔者以为，如果从后一角度去考虑，我们就可对很多问题得出新的不同看法。例如，如果集中于数学教育的社会职

责，那么，与“帮助学生学会数学地思维”这一提法相比，“帮助学生经由数学学习学会思维”显然就是一个更为合适的提法。另外，又如第一节所已提及的，如果认为数学教育应对培养未来社会的合格公民作出贡献，而民主性、开放性和技术性的不断增强则可被看成未来社会的重要特征，那么，我们也就会对应当如何去从事数学教学得出新的看法，特别是，我们即可更为深入地去认识探索性活动和合作学习的意义。

其次，对于学习活动本质的理解也应被看成数学教学观念的一个重要内容，而这相对于数学观念显然也具有较大的相对独立性。事实上，在笔者看来，这正是80年代中期以来在数学教育中兴起的建构主义思潮的根本意义所在，即其不仅促使我们重新认识教师和学生在教学活动中的作用和地位，并从整体上对传统的教法设计理论构成了严重的挑战。①

再者，笔者认为，我们又应看到在教师的数学观念与其教学实践之间存在有一种动态的、辩证的关系。这就是说，我们既应看到教师的数学观念对其教学实践有着十分重要的影响，同时又应看到所说的教学实践无论成功或失败，反过来又必然会促使教师对自己的数学观念（以及数学教学观念）作出自觉的反思，并由此而作出必要的改进。从而，总的来说，这就正如A. Thompson所指出的：“已有的文献支持了这样一种观点，即观念影响了教室中的实践活动，教师所具有的观念在此似

---

① 郑毓信、梁贯成：《认知科学、建构主义与数学教育》，第四章，上海，上海教育出版社，1998。

乎起了过滤器的作用，借助于此教师才能理解自己通过与学生和教学题材的相互作用获得的经验。但是，作为问题的另一方面，教师观念中很多成分又源自教室中的经验，并是由后者不断调整的，教师们正是通过与这一特定环境的相互作用，包括教学方面的各种要求与现存的问题，并经由反思对自己的观念作出评价和重组。”①

就教室文化的研究而言，除去教师所具有的观念以外，我们当然也应注意学生所具有的观念及其对于教学活动的影响。就后者而言，我们在此仅限于指出以下两点：

第一，学生的观念主要地就是通过学校中的数学教学活动得以形成的（当然，又如第一节中所已指出的，我们在此还应看到整体性的文化传统与特定环境的影响，关于后者可参见第三节的论述）。例如，正是从这样的角度去分析，波利亚指出：“有一条绝对无误的教学法——假如教师厌烦他的课题，那么整个班级也将无例外地厌烦它。”②

事实上，我们在此还可从更为广泛的角度去分析教学活动对于学生观念的影响。例如，在上述的第一种教学形式（即“静态的、绝对主义数学观”支配下的教学形式）下，学生很快就会形成这样的想法：数学就是数学课程中所列举的各个科目，即如算术、代数、几何等；另外，没有学过的东西则就不可能会，因为学生的职责

---

① A. Thompson: “Teacher's Beliefs and Conceptions: a synthesis of the research” D. Grouns (ed): 《Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning》, Macmillan, 1992, P. 138.

② 波利亚：《数学的发现》，第二卷，第174页，呼和浩特，内蒙古人民出版社，1980。

就是接受，而不是探索或发现，从而，这事实上就把自己摆到了一个完全被动的地位上。

再者，我们又应看到学生的学习过程在很大程度上也就是学生对自己的行动作出调整以满足教师期望的过程。例如，在上述的教学形式下，学生很快就会以给出正确的解答（包括练习和考试，特别是在考试中）作为自己的主要目标，并认为实现这一目标的最有效途径就是牢牢记住教师给出的方法，并通过模仿以获得教师所希望的解答。显然，一旦形成了这样的观念，那么，数学的实际意义就会被认为是与学校的数学学习完全不相干的。从而，这事实上也就可以被看成出现以下情况的一个重要原因，即尽管教师（或教材中）有时会引入一些日常情景，但这通常并不能取得很好的效果，而后者又不仅是因为日常情景的引入有时过于牵强附会，而且是因为我们所希望学生了解的数学的现实意义从根本上说就被学生看成是与学校的数学学习完全无关的。

由以上的分析可以看出，我们也应注意分析教师的数学观念是如何形成的。笔者以为，以上的讨论事实上即已对此提供了初步的解答，特别是，我们应当清楚地看到传统文化的影响以及教师作为学生时的学习经验对于他们后来的教学工作的重要影响。另外，笔者认为，这也应被看成一个十分重要的因素，即我们的数学教师是否具有一定的数学研究经验，特别是，后者对于教师形成“动态的、发展的数学观”是十分重要的。显然，从后一角度去分析，我们也就可以更好地理解波利亚的以下论述：“数学教师应当具有一定的数学工作经验”；

特殊地，“数学教师的训练，应当在解题讲习班这种形式或在任何其他适当的形式下，向他们提供有适当水平的独立的（‘创造性’的）工作的经历。”[①]

第二，就观念的形成和变化而言，我们又应看到，在教师与学生之间所存在的并非是一种单向的关系，即只存在教师对于学生的影响；恰恰相反，这两者事实上形成了所谓的“学习共同体”，从而在两者之间也存在有一种动态的、辩证的关系。例如，在笔者看来，以下的事实即就最为清楚地表明了这种关系的相互作用性和互相限制性：有时教师表现出了积极从事数学教学改革的极大热情，但是，学生却对此采取了消极、甚至是抵制的态度，从而就对教师产生了极大的负面影响。当然，我们在此并不应对学生作任何的指责，勿宁说，这事实上即是从反面更为清楚地表明了观念（从更大的范围看，就是传统）的力量。

综上可见，教师（和学生）所持有的观念（包括数学观念和数学教学观念）的确在很大程度上决定了教室中的数学教学活动是如何进行的。事实上，由上面的分析我们已经知道，所说的观念不仅对教学方法有着直接的影响，面且也在很大程度上决定了教师和学生在教学活动中的地位和作用，包括两者相互作用的方式等。正是在这样的意义上，在很多研究者看来，我们在此即可论及不同的“（数学）教室文化”，而后者在很大程度上就是与教师和学生所具有的各种观念直接相对应的。这

① 波利亚：《数学的发现》，第二卷，第168～172页，呼和浩特，内蒙古人民出版社，1980。

也就正如 Nickson 所指出的："数学教室的文化是随着其中的角色改变的。各个教室所特有的文化是由以下因素所决定的，即教师和学生引入其中的知识、信念、价值观等，以及这些成分对教室中社会运作的影响。"①

最后，由上面的讨论我们也就可以看出"（数学）教室文化"研究的根本意义：这即能促进教师对自己所具有的观念的自觉反思，而这又不仅是一个由不自觉向自觉状态的转变过程，而且也直接关系到了观念的不断更新与改进。这就如 A. Thompson 所指出的："正是通过对于自己的观念和行动的反思，教师获得了关于自己的隐蔽的假设、信念和观点，以及这些成分是如何与自己的行动相联系的更大自觉性。也正是通过反思，教师发展起了关于自己的观念、假设和行动的更大合理性，并清楚地认识到了其他的可能性。"②

三、民俗数学与数学教育

"民俗数学"（ethnomathemtics）是 80 年代前后在国际数学界和数学教育界兴起的一个新的研究课题。就其基本的意义而言，这可被看成数学与人类文化学的一种交叉，也即是关于数学（和数学教育）的人类文化学研究；③ 另外，其首要的论点则是对于数学的社会－文化属

---

① M. Nickson: "The Culture of the Mathematics Classroom: an Unknown Quantity?" D. Grouws (ed):《Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning》, Macmillan, 1992, P. 111.

② A. Thompson: "Teacher's Beliefs and Conceptions: a synthesis of the research", D. Grouws (ed):《Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning》, Macmillan, 1992, P. 139.

③ P. Gerdes: "Ethnomathematics and Mathematics Education", A. Bishop (ed):《International Handbook of Mathematics Education》, Kluwer, 1996, P. 909.

性的明确肯定。例如，正是在这样的意义上，“民俗数学”常常也被定义为对数学与相应的社会－文化背景之间关系的研究，即是要研究“在各种特定的文化系统中数学是如何产生、传播、扩散和专门化的”。[1]

显然，按照上述的理解，民俗数学与人类文化学的研究就是十分接近的，并在很大程度上就可被看成后者的一个重要组成部分；特别是，由于多元文化的观点正是人类文化学研究的一个主要结论，因此，由人类历史上多种不同的文明形式的存在，我们也就应当具体地去研究其相应的数学形式（应当指明，对于这里所说的“数学”必须作广义的理解，而这又不仅是指我们应把数学知识、数学技能和数学地思维方式等同时包括在内，而且也是指所有这些未必要得到充分的发展，也可能处于萌芽的状态），或者说，我们即应明确地肯定数学形式的多样性。另外，又如前面所已指出的，按照现代的用法，“文化”这一概念已经获得了更为广义的意义，即不仅是指宏观意义上的各种人类文明，诸如不同地区、不同国家、不同民族所特有的文化传统等，而且也是指各个特殊的社群所特有的“生活方式”、“工作方式”，从而，按照这样的理解，对于前述的“数学形式的多样性”我们也就必须作更为广义的理解，特别是，我们应当明确肯定这样的事实，即各个不同的文化社群，如不同的职业团体、不同年龄组的儿童等，都可发展起自己特殊的数学形式。显然，这事实上就极大地拓宽了“民俗数

---

① P. Gerdes: "Ethnomathematics and Mathematics Education", A. Bishop (ed): 《International Handbook of Mathematics Education》, Kluwer, 1996, P. 909.

学”的研究范围：它已经不再局限于人类文化学的传统范围，而是同时包括了历史的和现实的、宏观的和微观的研究。

从而，就现实的情况而言，“民俗数学”这一概念的内涵就是十分丰富的，对此例如由以下诸多相关术语的应用就可清楚地看出：

“本土数学”（indigenous mathematics），这一术语主要是在与“外来数学”（“西方数学”）相对立的意义上得到了使用；

“社会数学”（socio-mathematics），这是指在各种特定社会环境中发展起来的数学；

“非正式的数学”（informal mathematics），这是指在学校以外所学到的数学；

“自发的数学”（spontaneous mathematics），这一术语突出强调了这样的事实，即任何一个人或文化群体都能自发地形成一定的数学知识；

“被压制的数学”（oppressed mathematics），这是指这样的数学成分，它们存在于民众的日常生活之中，但却受到了占据主导地位的意识形态的压制，也即不能得到社会的主导成分的承认；

“非标准的数学”（non-standard mathematics），除去与“正规数学”（“学院数学”，academic mathematics）的对立以外，这一术语并突出地强调了数学的文化相关性，即各种文化都会发展、并将继续发展自己特有的数学形式；

“被遗忘的数学”（hidden or frozen mathematics），这

是指前殖民地人民原先具有的、但在殖民化的过程中却被遗忘了的数学知识，从而，现在的任务就是如何去发掘和重建这些成分；

"日常数学"（folk mathematics），这是指体现于日常活动的数学，尽管这些成分常常不被认为是数学。

显然，上述各个专门用语的使用更为清楚地表明，"民俗数学"的研究的确具有多个不同的方向或侧重点；但是，又如前面所已指明的，这正是所有这些研究的一个共同点，即是明确肯定了数学的文化相关性。更为一般地说，这事实上就可被看成所谓的"民俗数学运动"（ethnomathematical movement）的一个重要特征，即其支持者们对数学普遍持有一种广义的理解，并认为数学的技术和事实都是文化的产物，而不同的文化（或子文化）则会发展出多种不同的数学形式："在某些经济、社会和文化条件下，数学会在某个方向上得到形成和发展；在其他的条件下，数学则会在不同的方向上得到形成和发展，从而，数学的发展就不是高度统一的。"[①] 显然，按照这样的看法，数学就不能被看成单一的、普遍的、超越文化的。由于后者正是传统数学观的一个重要特征，因此，在这样的意义上，"民俗数学"的兴起也就意味着数学观的一个重要转变。

另外，由以上的介绍我们也可看出，现代关于"民俗数学"的研究可以大致地归结为以下的两类：

第一类确实可以被看成人类文化学研究的一个组成

---

① P. Gerdes:"Ethnomathematics and Mathematics Education"、A. Bishop（ed）:《International Handbook of Mathematics Education》, Kluwer, 1996, P. 917

成分，其主要着眼于历史的考察，并认为“民俗数学”研究的一个重要任务就是要努力重建那些在西方文明扩展的过程中受到压制和排斥的数学知识、数学技能和数学思维方式等，并依据多元文化的立场对此作出公正的评价，特别是，我们不能单纯依据“西方数学”的观点而断言所有其他的数学形式，或者只是西方数学的一种萌芽形式，或者根本不具有任何的重要性和科学性；恰恰相反，我们在此应当明确反对在数学（和数学史）领域中长期存在的“西方至上”、“白人至上”的观点。（显然，从这样的角度去分析，这也就是数学教育工作者所面临的一个重要任务，即应使所有的数学教师清楚地认识数学的多元性，学会尊重各种不同的数学形式，并从中吸取有益的成分。）

其次，与上述研究的历史倾向相对立，另一类“民俗数学”的研究则可说更加关心现实的问题，特别是与数学教育直接相关的问题，而其主要论点就在于：就数学学习而言，我们不仅应当看到学校中的数学教学，而且也应看到整个文化环境、特别是日常生活的影响。这也就是说，学校中的数学学习不应被看成学生数学知识的惟一来源，恰恰相反，他们所具有的很多数学知识都是从学校以外的生活中获得的。另外，在这一方向上工作的数学家和数学教育学者通常又突出强调了以下的事实，即在很多情况下这种源于日常生活的数学是与学生在学校中所学到的“正规数学”（又可称为“学校数学”）很不相同的。

就后一方向上的研究而言，我们并应特别提及巴西

学者的工作。

事实上，人们现在普遍地认为，巴西学者，特别是U. D'Ambrosio等人，应当被看成“民俗数学”研究的最早倡导者。例如，巴西学者的以下发现就引起了人们的普遍重视，即来自贫困家庭的巴西儿童在数学上表现出了两种截然不同的状态：他们在课后通常从事街头的叫卖工作，并在这种交易活动中表现出了熟练的计算能力；然而，同样是这些学生，他们在学校中的数学学习却往往只是失败的记录。

巴西学者并作了如下的进一步实验：以两种不同的方式给五个学生同样的数学问题，第一种采取现场买卖的形式；然后，在一个星期以后，再用文字题的形式要求他们解答同样的问题。结果发现，在后一种情况下，不仅学生解答的正确率大大降低，而且在求解这两类问题时，他们所使用的方法也很不相同：在前一种情况，学生所采用的是口算，在后一场合，学生们则采取了笔算的方法。从而，在研究者看来，在此事实上就存在有两种不同的数学，即所谓的“日常数学”与“学校数学”。(应当指出，正是通过所说的研究，并就是为了表明与学校中所学习的“正规数学”的区别，D'Ambrosio首先创造了“民俗数学”这样一个术语。当然，由以上的介绍我们已经知道，“民俗数学”后来又获得更为广泛的意义，即不再局限于上述的“日常数学”。)

显然，从教育的角度看，上述的事例即为我们搞好数学教育提出了一个十分严重的问题，特别是，学校的数学教学究竟是一种成功的实践、还是一种失败的努力?

为了更清楚地说明问题，在此还可举出另一个事例——这是台湾一位小学教师对自己亲身体验的一段口述：

记得二年前，我女儿幼稚园大班，我儿子小学三年级，有一天带他们二人去吃每客 199 元的比萨。付账时，我问儿子和女儿：妈妈一共要付多少元啊？儿子嘴巴喃喃念着：三九，二十七进二，三九，二十七进二；女儿却低着头数着手指头，一会儿，儿子喊着："妈妈！你有没有纸和笔，我需要纸和笔来写'进位'，否则会忘。"儿子还未算出。女儿却小声地告诉我："妈妈！你蹲下来一点，我告诉你，我知道要付多少钱了。"

"哦！真的，要付多少钱？"

"你拿 600 元给柜台的阿姨，她会找你 3 元。"

付完钱后，牵着女儿的手走向店外，再问："小妹！你怎么给阿姨 600 元，还会找 3 元呢？"

"我用数的啊！199 再过去就是 200、400、600，三个人共要给 600 元，但是阿姨一定要再找 3 元给我们才可以，她多拿了 3 元嘛！"

以上只是"前奏"，更"精彩的"还在后面：

最近带他们二人去吃"沙拉吧"，一人份 380 元，付账时，我问他们兄妹二人："算算看，要付多少元？"二人异口同声地回答："给我纸和笔。"我说："没有纸和笔。"女儿答腔："那就算不出来了。"

这位教师感慨地说："只差两年，我女儿就变成不会解题，只会计算了。"

读了这一段描述后，我想大多数读者也会像那位编辑一样，不禁要提出这样的疑问："究竟是谁把小孩教笨

了？”

除去这种直接的“疑问”以外，一些学者并从理论的角度对此作出了进一步分析。例如，就上述巴西小孩的实例而言，D'Ambrosio 提出，在此事实上存在有一定的“文化冲突”。

具体地说，D'Ambrosio 指出：“在上学以前和学校以外，世界上几乎所有儿童都发展起了一定的应用数和量的能力、以及一定的推理能力，然而，所有这些‘自发的’数学能力在进入学校以后都被‘所学到的数学能力’完全取代了。”他写道：尽管儿童们所面临的是同样的事物和需要，但他们却被要求使用一种全新的方法，从而，这事实上就在这些儿童的心中造成了一种心理障碍，后者并直接阻碍了他们对于学校数学的学习。更有甚者，这种早期的数学学习很容易使学生丧失自信心，从而就会对其一生产生严重的消极影响。[①] 从而，这就不能不说是一种真正的失败。

也正是在同样的意义上，A. Bishop 指出：“所有正规的数学教育都有一个文化交流的过程，在这一过程中每一儿童（与教师）并都经历了一定程度的文化冲突。”[②]

（显然，从这样的角度去分析，中国的数学教育工作也就应当认真考虑这样的问题，即在我们的数学教育中是否也存在有一定的文化冲突？特别是，中国的传统文化与主要源于西方的“学校数学教育”是否完全相容？

---

① D'Ambrosio：《Socio - cultural Bases for Mathematics Education》，UNICAMP.，1985，P. 45.

② A. Bishop："Cultural Conflict in Mathematics Education: Developing a Research Agenda"，《For the Learning of Mathematics》，14［1994］（2），P. 16.

或者说，如果这两者并不构成直接的冲突的话，那么，究竟是我们同化了外来的成分、还是我们已被外来的成分所彻底异化以致完全丧失了自我?)

那么，我们究竟如何去解决所说的"文化冲突"呢?或者说，面临着"日常数学"和"学校数学"这样两种不同的数学，我们究竟应当怎么办?特别是，我们是否可以完全放弃"学校数学"而仅仅保留"日常数学"?

应当指出，对于后一问题我们不应单凭直觉简单地予以回答，毋宁说，这一问题的正确解答取决于对"民俗数学"性质更为深入的研究。

具体地说，这正是"民俗数学"的一个重要特点，即其不仅涉及到了相应的数量关系，而且也是与各种具体的情景直接相联系的，从而，这就使得儿童清楚地意识到了数学是与日常生活密切相关的，也即是一种有意义的活动。

但是，"民俗数学"也有着明确的局限性。例如，如果始终采用口算的方式，那么，在面对较大的数量时，所说的"自发的数学能力"往往会遇上困难。

另外，更为重要的是，研究表明，由于"民俗数学"是与各个具体的情景直接相联系的，因此，相应的数学知识和技能就不具有较大的可迁移性。例如，在一项以巴西建筑工人（施工员）为对象所作的研究中，研究者发现，那些没有受过正规学校教育的施工员，在面对较为熟悉的比例时，一般能正确和迅速地求得图纸上某个尺寸所代表的实际数据；但是，如果他们所面对的是不很熟悉的比例，则就表现出了很大的局限性，例如，他

们往往采取“错误尝试”的方法，也即希望能通过归结为熟悉的情况来解决所面临的新情况，但由于未能上升到一般的算法，因此，就如以下的对话所表明的，这种努力常常以失败而告终：

（所给出的问题为9公分∶3米＝1.5∶x，其中所用到的比例1∶33.3是施工员们所不熟悉的，他们所经常用到的只是1∶50，1∶100和1∶20。）

施工员：“9公分，3米，这个尺寸是……不，这将是4.5米，……我作不出来。”

调查者：“为什么，前几个问题（其中所采用的都是施工员熟悉的比例）你不是都解决了吗？”

施工员：“因为，这不是1∶50的情况，1∶1（这里指1∶100）也不行，1∶20也不行，有三种尺寸1∶50，1∶20和1∶1，最简单的是1∶1，这时你不用作任何计算，只需看一下多少公分就可知道是多少米，而如果是1∶50或1∶20你就必须进行计算，但现在是9公分代表3米，我从来没有遇到过这样的情况，我只遇到过另外的三种情况。”[①]

再例如，以下的研究结果显然也从又一角度表明了“民俗数学”的局限性，即在求解文字题时，大部分未进过学校的成年人能很好地解决直接的问题，但如果问题的求解需要用到逆运算，解答的正确率就大大降低了，特别是，如果所涉及的数量较大，则就更加是这样的情况；与此相对照，通过学校的学习，上述的情况就有了

---

① T. Carraher: "From drawing to building, Working with mathematical scales",《International Journal of Behavioral Development》, 1986, No. 9.

很大的改进。[①] 从而，我们在此就可引出这样的结论：学校教育在帮助学生学会使用逆运算来解决问题方面有着明显的效果。显然，这也就是说，如果仅仅依靠"自发的数学能力"，则就往往不善于从反面去思考问题。

综上可见，"民俗数学"既有明显的优点，同时也具有严重的局限性，从而，在面对"民俗数学"与"学校数学"的冲突时，我们就不应采取完全放弃"学校数学"的作法，而应努力将这两者很好地融合起来。

例如，作为后一方向上的一个尝试，人们发现，利用想象的情景去帮助学生掌握"学校数学"，对于提高解决问题的正确率有着明显的效果，而且也有利于学生更好地认识数学的意义，从而不至于把数学看成是毫无实际意义的符号游戏。

一般地说，人们认为，我们应当善于将"日常数学"用作学校中数学学习的出发点和必要背景。从而，一个好的数学教师就应高度重视对于学生文化背景的了解，并应善于把它与学校中的数学教学活动联系起来。另外，这更可以被看成数学教学的一条重要原则："数学教学，除非建立在学生的固有文化和生活兴趣之上，否则，就不可能有效。"（O. Raum 语）

但是，从理论的角度看，我们在此显然又应考虑这样的问题：在"日常数学"与"学校数学"之间是否存在有一定的相容性？已有的研究在这方面也提供了一些初步的结论，特别是，研究表明，如果透过内容上的不同

---

① T. Carraher: "Adult mathematical skills, The effect of schooling", Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, 1988.

而着眼于内在的数学成分（包括数量属性、推理方式等），那么，在“日常数学”与“学校数学”之间确实存在有一定的共同点。例如，在上面所提到的巴西贫困家庭儿童的实例中，研究者发现，尽管这些儿童在街头做买卖时和在学校学数学时所采用的分别是口算和笔算的方法，但是，即使在进行口算时，他们仍然使用了与“学校数学”中相同的策略，即如在从事加减运算时，他们往往采取分解（decomposition）的策略（例如，利用分解的方法求解 200－35 的过程大致是这样的：①200 等于 100＋100；②100－30 是 70；③70－5 是 65；（4）把置于一边的 100 加上去，从而得出最终的解答：165），在从事乘除运算时，他们则又往往采取反复分组（repeated groupings）的办法（例如，利用反复分组的方法求解 120÷3 的过程大致是这样的：①每人获得 30，这时有剩余，3 乘 30 是 90，剩下的是 30；②每人加 5，这是 15，这时还剩下……15……③再加 5，这是 15；④每人得到 10 和 30，是 40）。显然，上述的解题策略正是运算法则的正确运用。

正因为在“日常数学”与“学校数学”之间存在有一定的共同点，这就为我们应用“日常数学”作为学校数学学习的出发点和必要背景提供了必要的依据。另外，也正是基于这样的考虑，人们提出，“在面临各个特定的数学概念的教学任务时，数学教师应当仔细研究他的学生在日常生活中是否已经用到了这一概念……并应努力弄清在日常概念与算法背后的不变因素。”①这也就是说，

① T. Nunes: "Ethnomathematics and Everyday Cognition", D. Grouws(ed):《Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning》, Macmillan, 1992, P 571.

"为了将民俗数学纳入到课程之中，必须首先确定其中的知识结构。"[①]

由于由"日常数学"到"学校数学"的过渡（更为一般地说，就是由"民俗数学"到"正规数学"的过渡）在很大程度上可被看成是由特殊上升到了一般，因此，比较也就常常被看成较好地实现所说的"过渡"的一个有效手段。这就是说，"对若干具有相同不变因素的情景的理解，将会导致关于相应概念（即不变因素）的抽象和一般化。"[②]

除去上述的各个作法以外，研究表明，要求学生对自己所作的数学工作作出表述也是促成由"日常数学"到"学校数学"过渡的一个有效方法，因为，对自己的数学工作作出表述的过程，往往包括了注意力的转移，即是由惟一注重最终的结果转移到了一般的方法；另外，从更深的层次看，这又必然会促进主体的自觉反思，而又正如人们所熟知的，反思在数学思维中占有特别重要的地位，特别是，这即就直接关系到了由"过程"向"对象"的转化（这也就是现代"高层次数学思维"研究中所谓的"凝聚"）。[③]

最后，应当提及，从发展的角度看，数学的应用，也即如何把学校中所学到的数学应用于社会实际生活，当然也应被看成"日常数学"与"学校数学"的一种融

① D'ambrosio: "Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics",《For the Learning of Mathematics》, 5 [1985] (1), P. 47.

② T. Nunes: "Ethnomathematics and Everyday Cognition", D. Grouws (ed):《Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning》, Macmillan, 1992, P. 571

③ 参见郑毓信、梁贯成：《认知科学、建构主义与数学教育》，第2.2节，上海，上海教育出版社，1998。

合。但由于这已经超出了目前的论题，在此我们就不再讨论了。

综上可见，“民俗数学”的研究不仅对数学教学提出了直接的挑战，而且也为我们搞好数学教育提供了有益的启示。就后者而言，笔者并愿特别提及以下的观点，即能否正确地看待“民俗数学”也关系到了数学教育的根本目标。具体地说，这就正如 P. Gerdes 所指出的，将源自不同文化的素材纳入到课程之中，从而对所有学生的文化背景作出正确评价，增强所有人的自信心，并学会尊重所有的人类和文化，这将有利于学生将来更好地适应多元文化的环境。[①] 而由前面的讨论我们已经知道，这种“多元文化”的观点正是未来社会开放性的一个必然要求。

---

① P. Gerdes: "Ethnomathematics and Mathematics Education", A. Bishop (ed): 《International Handbook of Mathematics Education》, Kluwer, 1996, P. 930.

【附录一】怀尔德论数学发展的动力和规律

曾长期在美国密执根大学任教的怀尔德教授是数学文化研究的一个重要倡导者，特别是，他曾对数学发展的动力和规律进行了较为系统的研究。他在这一方面的主要研究成果为：

在1968年出版的《数学概念的演化，一个初步的研究》一书中，怀尔德提出了关于数学发展的11个动力和10条规律。它们分别是：

数学发展的动力：①环境的力量；②遗传的力量；③符号化；④文化传播；⑤抽象；⑥一般化；⑦一体化；⑧多样化；⑨文化阻滞；⑩文化抵制；⑪选择。

数学发展的规律：

规律1　在任何时候，只有那些能增强已有数学的能力以满足自身的遗传力量或一般文化的环境力量的概念，才能得到发展。

规律2　概念的可接受性取决于它的富有成果的程度。特别是，一个概念不会由于它的起源或诸如“不真实的”此类形而上学的标准而永远遭到拒斥。

规律3　一个概念在数学上的重要性既取决于它的符号表达形式，也取决于它与其他概念的关系。如果一种符号形式造成了理解上的困难、甚至对这一概念的彻底拒绝，那么——假设这一概念是有用的——一种更容易把握和理解的符号形式就会得到发展。如果一组概念的

相互联系使得把它们合并成一个更为一般的概念的一体化成为可能，后者也就会得到发展。

规律 4　如果某一问题的解决将会促进某个数学理论的发展，那么，这一理论的概念结构就会以这样的方式得到发展以使这一问题能最终得到解决，而且，这种解决很可能是由若干个研究者彼此独立地作出的。

规律 5　由于共同的符号系统的采用或出版机会的增加，以及其他的交流方法所造成的传播机会，对于新概念的进化速度有着直接的影响。

规律 6　整个文化的需要，特别是数学文化的繁荣所能提供的更大便利，将会造成能满足这种需要的新的概念创造的发展。

规律 7　僵化的文化环境最终会抑制新的数学概念的发展，不利的政治气氛或一般的反科学的气氛也会造成同样的结果。

规律 8　由于现行概念结构的不相容性或不适合性的发现而造成的危机，会刺激数学的加速发展。

规律 9　新的概念常常依赖于那些在当时只是直觉地把握的概念，但后者的不完善性最终将导致新的危机。类似地，重要问题的解决也会产生新的问题。

规律 10　数学的进化是一个永无止境的过程，它只受到诸如规律 5、规律 6、规律 7 中所指出的各种偶然性的限制。

另外，在 1981 年出版的《作为文化系统的数学》一书中，怀尔德又提出了关于数学发展的 23 条规律——这一成果基于怀尔德自身的进一步的研究，也得益于他与

其他人的广泛讨论：

①重大问题的多重的独立的发现或解决，是一条规律，而不是例外。

②新概念的进化通常是由于遗传的力量、或者是由于借助环境力量得以表现的一般文化的压力造成的。

③一旦一个数学概念在数学文化中提出，它的可接受性最终将取决于这一概念的富有成果的程度；它将不会由于它的起源、或因为形而上学或者其他的标准谴责它是“不真实的”而永远遭到拒斥。

④一个新的数学概念的创造者的名望和地位在该概念的可接受性方面起着强制的作用，尤其是在新概念突破了传统时是这样；对于新的术语或符号的创造也是这样。

⑤一个概念或理论能否保持它的重要性，既取决于它的富有成果性，又取决于它的符号表达形式。如果后者造成了理解上的困难而概念却仍然是富有成果的，那么，一种更容易把握和理解的符号形式就会得到发展。

⑥如果一个理论的进展依赖于某一问题的解决，那么，这一理论的概念结构就会以这样的方式得到发展以使这一问题得到最终的解决。一般说来，这种解决将带来一大批新的成果。

⑦如果若干概念的一体化将会促进一个数学理论的发展，特别是这一理论的发展就依赖于所说的一体化，那么，这种一体化就会发生。

⑧如果数学的发展需要引人某种似乎是不合理或“不真实”的概念，那么，这种概念就会通过适当的且可

接受的解释提供出来。

⑨在任何时候，都有一种为数学共同体的成员所共同享有的文化直觉，它体现了关于数学概念的基本的和普遍接受的见解。

⑩不同文化与不同领域之间的传播经常会导致新概念的产生并加速数学的发展，假设接受的一方已经达到了必要的文化水平的话。

⑪由一般文化及其各种子文化，诸如科学的子文化，所造成的环境力量，将在数学子文化中造成明显的反映。这种反映既可能是增加新的数学概念的创造，也可能是数学创造的减少，这取决于环境力量的性质。

⑫当数学中取得了重大的进展或突破，而它们的意义又已为数学公众所理解时，就常常会导致对先前只是部分地被理解的概念的新的洞见，以及有待于解决的新的问题。

⑬数学现行概念结构中不相容性或不适当性的发现，将会导致补救性概念的产生。

⑭革命可能发生在数学的形而上学、符号体系和方法论之中，但不会发生在数学的内核中。

⑮数学的不断进化伴随着严密程度的提高。每一代数学家都会感到对先前几代人所作的隐藏的假设进行证明（或反驳）是必要的。

⑯数学系统的进化只能通过更高的抽象进行，这种抽象借助于一般化和一体化，并通常为遗传的力量所激励。

⑰个别的数学家必须维持与数学文化主流的接触，

而不能有其他的选择；他不仅受数学的发展状况和已有的数学工具的限制，而且必须适应那些即将走向综合的概念。

⑱数学家们不时地宣称，他们的课题已经近乎“彻底解决了”，所有的基本结果已经得到，剩下的只是填补细节问题。

⑲文化的直觉主张，每个概念、每个理论都有一开端。

⑳数学的最终基础是数学共同体的文化直觉。

㉑随着数学的进化，隐藏的假设不断被发现并得到明确的表述，其结果或者是普遍的接受，或者是部分或全面地被抛弃；接受通常伴随着对假设的分析以及用新的证明方法去证实它。

㉒数学中最活跃时期出现的充要条件是，存在有合适的文化气候，包括机会、刺激（如新领域的出现，悖论或矛盾的发现等）和材料。

㉓由于数学的文化基础，因此在数学中不存在什么绝对的东西，只有相对的东西。

【附录二】《数学的未来：预测的方法论》简介[1]

前苏联学者对于数学文化学的研究、特别是数学发展的规律也有着很大的兴趣。例如，在全苏范围内每两年举行一次“数学发展的规律及其现代趋势”的专题讨论会；有关学者并在这一方面发表了不少论文和专著，如“关于数学发展规律性的方法论分析”（1989），“现代数学发展的规律性”（1987），“科学的数学化：渊源、问题和前景”（1987），等等。

巴拉巴谢夫（A. Barabashev）是莫斯科大学科学哲学系的教授，他不仅在前苏联的数学哲学研究中发挥了领头人物的作用，而且也对数学发展的规律等问题进行了较为深入的研究。以下我们就对巴拉巴谢夫在这方面的一部著作《数学的未来：预测的方法论》[2] 作一简要的介绍，读者由此可对前苏联学者在这一方面的工作有大致的了解。

《数学的未来：预测的方法论》全书共 260 页，分为两个部分，分别对所谓的预测数学未来发展的“经验方法”和“理论方法”进行了分析和论述。

所谓“预测数学未来发展的经验方法”，是指实际从事数学研究的人员关于数学的未来、它的发展趋势的看

---

[1] 这一材料是由《数学的未来：预测的方法论》一书的作者巴拉巴谢夫专门向笔者提供的，江苏教育学院的肖伯棠教授协助将原文由俄文译成了中文。特此并表示诚挚的谢意。

[2] 巴拉巴谢夫：《数学的未来：预测的方法论》（俄文版），莫斯科，莫斯科大学出版社，1991。

法。该书第一部分的第一节首先对不同时期、不同数学家所作出的经验预测进行了分析，指出其中有许多是彼此矛盾的，而这种不和谐性的根源则是由于数学结构（作者把数学不同部分的等级隶属和相互关系理解为数学结构）不可逆转地趋向于复杂化，特别是，自20世纪30年代以来，数学结构已达到了这样的复杂程度，以至在数学研究中已不再存在所谓的“通才”，也即不再有能在完全不同的数学领域中同时作出重要贡献的多面手。基于这样的分析，作者提出，精通数学的研究人员所作出的有代表性的预见事实上就只是一种个人的主观意见，也即不可能客观地预测数学的未来发展。

第一部分的第二节对经验预测的具体方法进行了分析，指出在此不仅存在有个别的研究人员（或小的研究组合）与数学群体的区分，而且对于不同的需要也存在不同的预测方法。例如。如果所说的预测是为了迎合数学以外的需要（即如为了争取更多的拨款），那就应当着重指明数学在其他科学和技术领域的应用，而如果预测仅仅涉及到了数学群体自身，则就必须对数学不同领域的发展前景作出比较。另外，就个体所作的预测而言（它们或者是综述性工作的直接结果，或者建立在个人的专门研究之上），往往带有很大的主观性；但是，作者指出，预测的方法越“主观”（在上述的积极意义上），用这样的方法所作出的预测对于研究人员就越有吸引力。

第三节讨论了经验预测的实现方法。作者指出，经验预测在起始状态常常是极不定型的论点，即其措词往往带有很大程度的不精确性、模糊性和不确定性；然后，

随着研究的开展，这种目标意向会逐渐趋于明朗，并最终获得这样一个论题，它似乎对原来的预测作出了准确的定义（可称为“起始目标意向的具体化”）。作者认为，上述过程是与研究人员主体状态的变化直接相对应的：在起始阶段，目标（观测）出现在研究人员的精神世界中，对研究人员自身来说，它是一目了然的，但却无法把自己的认识清楚地传达给别人；然后，研究人员为实现目标开始了顽强的努力，直至最终找到了解决问题的路子，他并因此而感到恍然大悟。由此，作者得出结论道：目标具体化的过程一定会有无法排除的主观主义、主观假设的因素。

第一部分的第四节指出，经验预测的方案不是规范性、而仅仅是解释性的。这就是说，不可能教会数学工作者用这样的方案去预测数学的未来；恰恰相反，每个研究人员都可以按照自己的意思去对此作出解释。

第一部分总的结论是：经验预测不可能追求客观性，经验预测的方案也不能被用作一种规范，因此，经验预测看来就是一个死胡同。

其次，所谓“预测数学未来发展的理论方法”，是指把数学看成文化系统的一个子系统，并通过数学的动态系统特征来预测数学的未来发展。

《数学的未来：预测的方法论》一书第二部分的第一节首先对关于预测数学未来的理论方法的研究与数学哲学的关系进行了分析。作者指出，在数学哲学的研究中存在主流派与非主流派的区分。前者努力把不同的数学领域归结为主要的理论结构并把数学证明归结为规定的

程序。通过对主流派数学哲学在美国、英国和前苏联等国发展情况的分析，作者提出，主流派数学哲学现正处于危机之中。与主流派的研究相反，数学哲学中的非主流派把数学看成进化的社会文化的一个现象。作者并具体地指明了非主流数学哲学所面临的一系列内部问题和外部问题。例如，从数学史和数学自身引出的问题就属于非主流派的外部问题，而这即是与关于预测数学未来发展的理论方法的研究直接相关的。

第二部分的第二节集中讨论了数学发展的规律性问题。作者指出，尽管很多数学史学家否认这种规律的存在性，但是，这种规律的确是存在的。例如，数学史中常见的同时且独立的发现（“多重发现”）就是这方面的一个决定性例证。作者并对所说的“多重发现”的现象进行了详尽分析。他指出：第一，这些发现不是发生在同一瞬间，即或多或少都有时间上的差异；第二，即使研究人员不知道相互的存在和有关的工作，他们总还是处在同样的总体性文化环境和相同的知识基础之上；第三，他们的发现并不是完全一样的。通过上述实例的分析，作者指出，数学发展的规律具有社会的性质，而不能被看成纯客观的，作者并认为数学规律性的叙述具有模型的特征。

第三节讨论了数学史合理重建的现存模型。作者认为，以下一些模型是特别有趣的：基切尔（《数学知识的性质》，1983，牛津。参见附录二），库兹涅佐娃（《数学知识的认识问题》，1984，列宁格勒），巴拉巴谢夫（《数学知识发展中的辩证法》，1983，莫斯科）。此外还有柯

尔莫戈夫、瓦依捷尔和克莱因的更为提纲挈领的模型。特别是，在克莱因、西洛夫和另外几个模型中提出了关于创造和批判时期交替的概念。作者指出，当前关于数学发展的所有模型可以分为互相对立、而又相互补充的两组。例如，在对古希腊理论数学形成的模型进行分析时，就可清楚地看出这种区别。作者认为，这两组模型不是趋于一致，而是在不断的"争论"中得到完善。相应地，依据这些模型提出的数学发展规律也可分为两组：在每组内部，规律性之间有着很好的联系；但在两组之间则呈现出互补性。从而，如果考虑到数学史的统一，就有描绘数学发展历史规律性的两条互补链。

第四节讨论了数学历史发展的规律性在将来是否有可能被"完全"推翻。作者认为，数学事实上是一个"反射系统"：它的发展规律是社会性的，并可由于历史的发展改变自己的行为，因此，我们就必须进行与反射行为相对应的修正，包括"推翻"关于数学历史发展的某些规律。

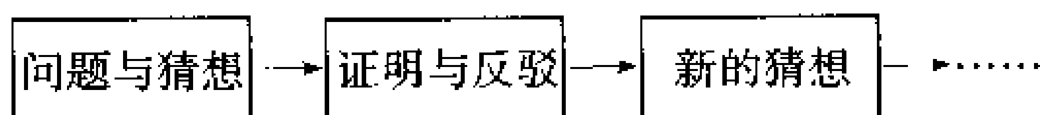
第二部分的最后一节给出了关于现代数学未来发展的理论预测和为了实现这种预测所应采取的方法。由于一系列数学发展的周期性规律的存在，作者把理论预测分为近期预测和远期预测，并指出了理论预测不同变化的可能性。

第二部分总的结论是：理论预测可以得到建立，按照所建立的理论预测进行的活动是规范性的。

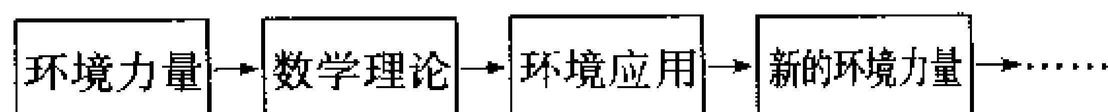
这一著作最后还给出了关于数学哲学现阶段发展的一些补充想法。

【附录三】基切尔关于数学发展模式的研究

关于数学发展模式的研究显然是与数学发展的动力与规律等问题直接相联系的。例如，正是由于突出地强调了猜想与反驳在数学发展中的作用，拉卡托斯提出，以下就可被看成数学发展的一个基本模式：



另外，由于认为环境力量对于数学的历史发展有着十分重要的作用，在怀尔德看来，以下也可被看成数学发展的一个基本模式：



这就是说，环境力量导致了新的数学概念和理论的建立，后者又产生了可以用于解决实际问题的更为有效的技术，并直接促进了相应的（非数学的）理论的发展，后者则又重新构成了新的环境力量，如此等等。

与上述的研究相比，美国著名数学哲学家、科学哲学家基切尔关于数学发展模式的研究可以说具有一定的特殊性，因为，基切尔首先对数学发展的基本单位作了较为仔细的分析，也正因为此，他所给出的关于数学发展的基本模式就有着较为丰富的内涵。

具体地说，基切尔认为，为了对数学的发展问题作出深入的研究，我们应当首先“以关于数学变化单位的

更为精确的描述去取代关于‘数学知识状况’的模糊说法。”基切尔指出，无论就科学知识或是数学知识的增长而言，“在这两种情形中，我们都应借助于一个多元体，也即由多种不同成分所组成的实践（practice）的变化，来理解知识的增长。”就数学而言，这就是指，我们应当把数学（“数学实践”）看成是由如下五个成分所组成的一个多元体：“语言”、“所接受的命题”、“所接受的论证”、“被认为是重要的问题”和“元数学观念”。[①] 容易看出，这一立场与第二章中关于“数学活动”的分析是十分一致的，也即是把数学主要地看成人类的一种创造性活动、并从社会－文化的角度进行分析的直接结果。

其次，基切尔认为，数学的发展可以归结为如下的五种基本模式：

（1）问题的解决。这是指通过引进某种新的论证而获得了某个或某些被认为是重要的数学问题的解答。由于这不仅直接导致了所接受的命题集的扩张，而且常常也造成了语言的变化，因此，这一变化就可具体地表示为（为简单起见，在此特引入以下符号分别表示“数学实践”的五个成分：L——“语言”，S——“所接受的命题”，R——“所接受的论证”，Q——“被认为是重要的问题”，M——“元数学观念”）：

$$\langle L, S, Q, R, M\rangle \text{——} \langle L', S', Q', R', M\rangle。$$

（2）问题的产生。按照问题产生的不同方式这一发

---

① P. Kitcher:《The Nature of Mathematical Knowledge》, Oxford University Press, 1983; “Mathmatical Naturalism”, W. Aspray & P. Kitcher (ed):《History and Philsophy of Modern Mathematics》, University of Minnesota Press, 1988.

展模式又可分为以下的两种不同类型：

第一，新问题的产生是语言扩展的直接结果。例如，数的概念的每一次扩张显然都会导致大量的新问题，即如新数的运算是否满足已知的运算规律等。这一发展模式可表示为：

<L，S，Q，R，M>——<L′，S，Q′，R，M>。

第二，新问题的产生是由于获得了新的结论，也即是所接受的命题集扩展的直接结果。例如，如果所获得的是肯定性的结果，我们就立即面临着如何将这一结果加以推广的问题；反之，如果所获得的是否定性的结果，我们则又应当考虑如何在新的、加强了的条件下去从事进一步的研究。这一发展模式可表示为：

<L，S，Q，R，M>——<L，S′，Q′，R，M>。

（3）一般化。这是指引进了更为一般的概念，从而也就是语言的一种扩展。例如，超穷数理论的建立显然就是一个一般化的过程，也即是把数的概念由有限扩展到了无限。

（4）严格化。这是指用较为严格的论证去取代原先的不那么产格的论证，或是用精确定义的概念去取代先前的较为含糊的概念。由于所说的取代过程往往是与所接受的命题集的变化直接相联系的，因此，这一变化模式就可表述为：

<L，S，Q，R，M>——<L′，S′，Q，R′，M>。

（5）系统化。这是指先前被认为是不相关的成分（命题、论证、问题）的统一。例如，公理化显然就是系统化的一个典型例于；另外，新的概念或新的表达方式

的引进也可能起到统一的作用，例如，数学的集合论解释显然就可看成后者的一个典型例子。后一例子同时也表明了这样一点，系统化常常会造成“元数学思想”的重要变化，包括什么是整个数学的合理基础、以及应当如何去评价各个方向上的研究等。

基切尔并对上述五种变化的合理性问题进行了具体分析。例如，由于一般化的过程即是由原先的对象中分离出了某一特性，而后者在先前则往往未能为人们所清楚地认识（即如基数与序数的明确区分），因此，一般化的过程就直接导致了认识的深化。同样地，由于揭示了先前被认为是互不相关的成分的联系，因此，系统化显然也有利于认识的深化，即是一种真正的进步。

但是，基切尔又强调指出，在很多情况下所说的变化也可能造成一定的“损失”。例如，问题的解决本身即已清楚地表明了相应的发展模式、也即“问题的解决”这一模式的合理性，但是，由于我们是以“数学实践”为基本单位来考察数学发展的，因此，我们也就应当注意分析这种发展在其他方面所可能造成的“副作用”，特别是，如果所说的问题解决建立在一种不那么严格的论证方法之上（无穷小方法就是这样的例子），而这种方法的普遍应用则不仅造成了理解上的困难，并可能导致错误的结论，这时我们就需对所说变化的得失进行全面的衡量，而又只有在新的发展所带来的（所能设想到的）“收益”大于（所能设想到的）“损失”时，才能认为所说的变化是合理的。同样地，基切尔指出，也只在不进行概念的澄清或论证的严格化就无法实现理论的进一步

发展、特别是无法解决被认为是重要的数学问题时，对于严格化的追求才能被认为是合理的；但是，我们在此仍应注意分析这种发展所可能造成的“损失”，即如对于原有论证方式的否定就可能意味着丧失了一种有效的方法，从而，总的来说，我们在此也就需要通过对“得失”的全面衡量才能对相应变化的合理性作出正确的判断。

最后，基切尔指出，我们即可依据上述的五种基本模式对数学的历史发展过程作出具体的描述：“现代的数学知识是由初始状态经由一系列的合理转变得以形成的。”这就是说，人们最初具有的只是所谓的“原始的数学知识”，它们所涉及的是具体的事物，也即是与物理对象的具体操作（即如聚集和分离等）直接相关的，并就建立在直接的经验之上；其次，由所说的原始数学知识出发，通过一系列的合理变化（这可被归结为上述的五种模式），又逐步产生了依次相接的各个“数学实践”，直至现代的“数学实践”。从而，在基切尔看来，这就不仅清楚地表明了数学历史发展的合理性，而且也初步地建立起了一种“奠基于数学史之上的数学哲学”。

后　记

本书由郑毓信、王宪昌、蔡仲三人合作完成。郑毓信提出了全书的初步构想。然后，在集体讨论的基础上，进行了如下具体分工：郑毓信负责第一部分“数学的文化观念”，王宪昌负责第二部分“数学文化史的研究”，蔡仲负责第三部分“数学的文化价值”。最后，由郑毓信负责全书的修改与统稿。

笔者并愿借此机会表示对四川教育出版社有关领导和责任编辑刘玲同志的诚挚谢意，感谢他们所一贯给予的高度信任和大力支持，离开了这一切，笔者是不可能在“数学·哲学·文化·教育”这一方向上持续前进的。

郑毓信

1999年11月